Foucaults pendel

Even Petersen

April 12, 2023

1 Introduksjon

Denne oppgåva skal gjere målingar på ei kule som dinglar frå taket til NTNU sitt realfagsbygg på gløshaugen. Kula er inspirert av "Focaults pendel" som skal demonstrere rotasjonen til jorda . Som dei simple skapningane me er ser dei fleste berre ei tung kule som dinglar frå taket og slår ned metallklossar eit par gonger i timen. Spørsmålet som slår dei fleste er ikkje korleis det har seg til at pendelet roterar gjennom dagen, om endringa er gjevn, om oppførselen ville vore annleis andre stadar på jorda, men istadenfor kor lang han er. Det byrjer å bli ei stund sida pendelen er satt opp og ingen har tatt seg bryet til å hugse lengda på dette undervurderte instrumentet gjennom tida og forfattaren er for menneskesky til å spørje uansett. Det er også ein elektromagnet i botn som går av og på ettersom kor kula er i banen sin. Denne skal hjelpe kula å fortsette dinglinga utan å bli bremsa av luftmotstand friksjon og liknande. NTNU vart redd for neste års straumrekning og tvinger derfor overarbeida elektronikkstudentar å finne ut kor mykje av straumbudskjettet han brukar samt svare på millionkronersspørsmålet kor lang han er.

2 difflikning

For å skaffe informasjon blei det satt opp ei skisse av senarioet figur 1. G er tyngdekrafte kula opplever og er gitt med $G = mg$ kor m er massen til kula og g er tyngdeakselerasjonen som er målt på gløshaugen. $g = 9.82147m/s^2$ (Statens Kartverk 1971). G blir dekomponert til vektorane $\tilde{G}$ og F_g. $\tilde{G}$ er i vårt tilfelle uinteresant og $F_g = sin(\theta) \cdot G$. l er lengda på snora og er ukjent for nå. θ er vinkelen snora har med loddrett akse (θ er positiv når snora er til høgre for loddrett akse, og negativ nor han er til venstre). F_r er luftmoststanden kula opplever og er gitt med $F_r = \frac{1}{2}pv^2C_DA$. p er væsketettleika på lufta, v er hastigheita på kula i m/s, C_D er luftmotstandkoeffisienten og A er tverrsnittarealet.

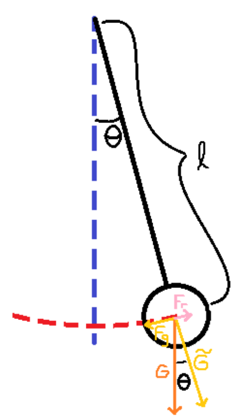

Figure 1: Skisse med kraftvektorer og andre viktige storleiker påteikna. l er lengda, θ er vinkelen mellom loddrett akse og snor (θ *er positiv til høgre og negativ til venstre*), G er tyngdekrafta og blir dekomponert i $\tilde{G}$ og F_g, og F_r er luftmotstanden

Sidan det er ein elektromagnet i botn av pendelet, pendelet er tungt og langt pluss held seg i “låge” hastigheitar kan me sjå bort ifrå luftmotstande for nå. Krafta F_g kan bli gjort om til akselerasjonen a_g vha. newtons andre lov og me får $a_g = sin(\theta) \cdot g$ (1)

$$\begin{aligned} F_g &= sin(\theta) \cdot G \\ F_g &= sin(\theta) \cdot m \cdot g \\ a_g &= sin(\theta) \cdot g \end{aligned} \tag{1}$$

Resonomentet i figur 2 gir oss at vinkelakselerasjonen med berre hensyn på tyngdeakselerasjonen $\ddot{\theta}_g$ gitt med a_g er $\ddot{\theta}_g = \frac{-a_g}{l} = \frac{-sin(\theta)\cdot g}{l}$. Uttrykket kan skrivast om til $\ddot{\theta}_g l + g \cdot sin(\theta) = 0$

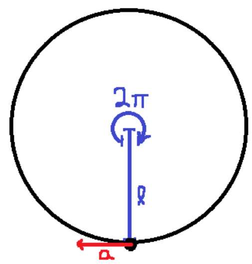

Figure 2: Omkrinsen av figuren $O = 2\pi \cdot l$. Det gir oss radian per omkrinslende $R_o = \frac{2\pi}{2\pi \cdot l} = \frac{1}{l}$. Akselerasjonen a tangerer pendelet sin bane og me kan utleie vinkelakselerasjonen $\ddot{\theta} = \frac{-a}{l}$. Forteiknet kjem av at positiv retning er deffinert motsatt veg frå a.

Sidan pendelen er lang og utslaget $\theta < \frac{\pi}{12}$ (observert visuelt) kan ein gi estimatet $sin(\theta) = \theta$ med ein uskarpleik på mindre enn 1.2%.

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_g l + sin(\theta) g &= 0 \\ \ddot{\theta}_g l + 0\dot{\theta} + g\theta &= 0 \\ \theta &= A_1 e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + A_2 e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} \\ \theta &= C_1 cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + C_2 i sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t) \end{aligned} \tag{2}$$

(2) gir oss ein frekvens $f = \frac{\sqrt{\frac{g}{l}}}{2\pi} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ kor T er perioden til pendelen. utifrå dette kan me sjå at for små utslag er perioden kun avhengig av lengda på pendelet.

Internett forteljer oss at formela for luftmotstand $F_R = \frac{1}{2} p v^2 C_D A$ kor p er væsketettleiken i kg/m^3, v er farta kula har iforhold til væska i m/s og kan bli gitt ved $\dot{\theta} \cdot l$, C_D er luftmotstandskoeffisienten til lekamet og A er tverrsnittarealet til kula.

$$\begin{aligned} F_R &= \frac{1}{2} p v^2 C_D A \\ a_R &= \frac{1}{2m} p \dot{\theta}^2 l^2 C_D A \\ \ddot{\theta}_R &= \frac{1}{2m} p \frac{\dot{\theta}^3}{|\theta|} l C_D A \\ \beta &= \frac{1}{2m} p l C_D A \\ \ddot{\theta}_R &= \beta \frac{\dot{\theta}^3}{|\dot{\theta}|} \end{aligned} \tag{3}$$

Vinkelakselerasjonen mhp. luftmotstanden er gitt ved $\ddot{\theta}_R$. Sidan luftmotstanden avhenger av retninga til farten er det lagt til $\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}$ (3) for å skifte forteikn når kula snur. Uttrykka for $\ddot{\theta}_R$ og $\ddot{\theta}_g$ gir oss (4).

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \ddot{\theta}_g + \ddot{\theta}_R \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} sin(\theta) - \beta \frac{\dot{\theta}^3}{|\dot{\theta}|}\end{aligned} \tag{4}$$

3 Målingar og utrekningar

For å finne lengda på pendelen veit me utifrå (2) at perioden kun er avhengig av lengda på pendelen og er gitt med $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Det blei målt samanhengande $50T$ for hand til $503.7 \pm 0.5s$. Det gir oss ei periodetid på $10.075 \pm 0.01s$..

$$\begin{aligned}T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \\ l &= \frac{T^2}{4\pi^2} * g \\ l &= \frac{10.075s^2}{4\pi^2} * g \\ &= 25.253 \pm 0.25m\end{aligned} \tag{5}$$

og ei snorlengde på $25.253 \pm 0.25m$. (5). Maksavstanden pendelet går utfrå likevektlinja blei måla til $0.97m$ og gir ein vinkel $\theta = sin^{-1}(\frac{0.97m}{25.253m}) = 0.0122\pi$. Det gir ein tilnerming av $sin(\theta) = \theta$ med mindre enn 0.015% uskarpleik. Grunna den låge uskarpleika av tilnerminga blir denne feilkjelda sett bort ifrå i denne oppgåva

Det var stress å finne eit uttrykk for energitapet i luftmotstanden analytisk. Derfor blei det laga eit program for å simulere pendelen basert på difflikninga (4). Programmet er lagt som vedlegg.

Det blei brukt eulers explisitte metode for å rekne ut ledd θ_{n+1}.

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \dot{\theta}_n \cdot h \\ \dot{\theta}_{n+1} &= \dot{\theta}_n + \ddot{\theta}_n \cdot h\end{aligned} \tag{6}$$

$\ddot{\theta}$ er gitt med (4). Diameteren på kula blei måla til 20 cm med linjal. Det gir eittverrsnittareal på $0.01\pi m^2$. Fattige studentar har ikkje råd til å gå til innkjøp av massemålingsinstrumenter for diverse skuleprosjekter og manglar gutsa for å spørje labbane om å låne. Massen blei estimert ut ifrå fyrste tabellen som ga massetettleiken på stål frå internett. Den er $7850kg/m^3$. Med volumet $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 0.00419m^3$ får ein massen $V * 7850kg/m^3 = 32.9kg$ på kula. Simuleringane brukar kulemasse på 32.9 kg og eit tverrsnittareal på $0.01\pi m^2$. Tidssteget h blei satt til 0.01s. Det blei simulert ei tid på $20T = 201.5s$. for å sjå om programmet stemte overens med verklegheita figur 3. Noko ein tydeleg kan sjå han gjorde då han ga dei forventa 20 svingningane.

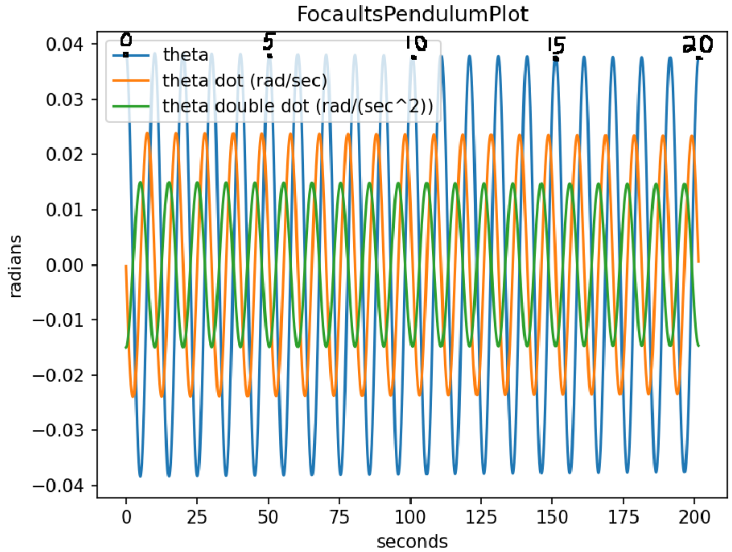

Figure 3: Simulering av 201.5s. for å sjå om simuleringa stemte overens med verklegheita. Her er det tydeleg 20 bølgjetoppar iløpet av simuleringstida, noko som lover godt. Figuren simulerer vinkelen theta, vinkelfarten theta dot, og vinkelakselerasjonen theta double dot.

Ein kodesnutt som berre plotta absolutt maks vinkelen pr tid vart lagt til og gir oss plottet figur 4. Det var for ikkje å ha for mange datapungter og framleis få ein nøyaktg måling. Det blei simulert ei veke kor elektromagneten var slått av (ca.60 000 s.). Noko som er verdt å merke er sjølv etter ei veke gir pendelen eit utslag på 0.0008 rad. som tilsvarar ei vingling på omlag 2 cm. Det er truleg enda merkbart men dei fleste ville nok sagt pendelen er i ro ved ei pendling på omlag 5 cm. Det tilsvarar $\theta = sin^{-}1(\frac{0.05}{25.25}) = 0.00198$. Ein kan lese av på grafen at denne amplituden kjem etter 258 500s. og tilsvarar 71.8t. omlag 3 døgn.

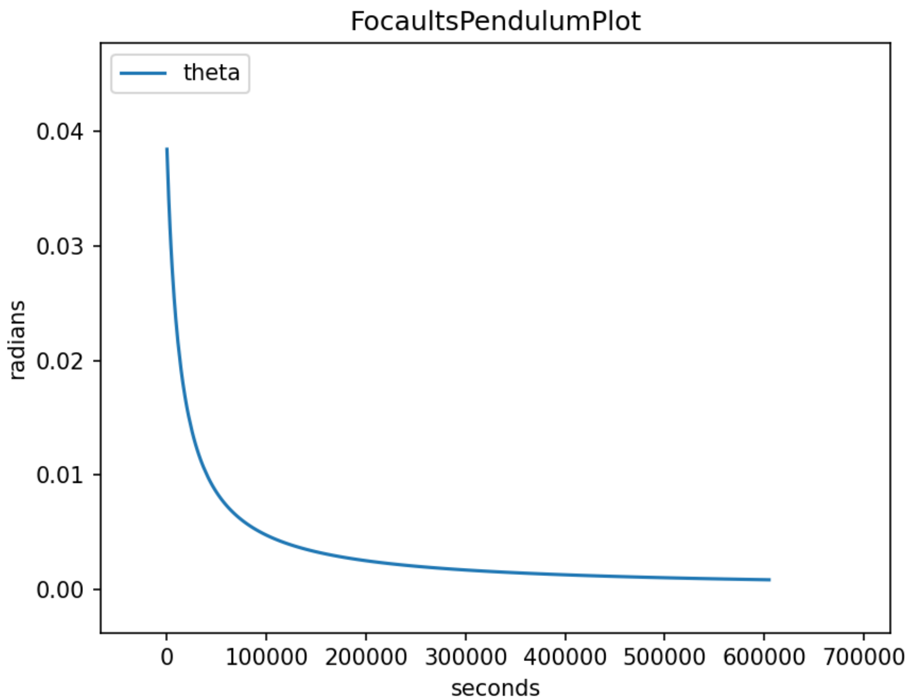

Figure 4: Eit plott over amplituden til pendelen gitt elektromagneten er avskrudd

Sidan simuleringa ga oversikt over vinkelfarten kan luftmotstandskrafta samt energitapet i form av luftmotstand reknast ut frå F_R (3) der $v = \dot{\theta} \cdot l$. Farta er tilnerma konstant gjennom tidssteget og distansen $d \approx v \cdot h$. Energien er gitt med $E = F \cdot d$, kor F er kraft i Newton og d er distanse i meter og gir oss energien i E_d i tidssteget h er $\frac{1}{2}p(\dot{\theta}l)^2 C_D A \dot{\theta} l h$. For å finne energien tapt i intervallet a til b kan ein summere opp tidsstega E_d over tidsrommet ein ønsker. I simuleringa ble det målt energibruken over $1T$ som ga 0.0053 joule figur5. Med ein verknadsgrad på omlag 85% som er ein vanleg verknadsgrad for elektromotorar gir det en total energibruk på $0.0063 j/T = 0.00063 W = 0.054 kWt/døgn$. Med 2022 sin Desember kurs på opp mot 7kr. pr. kWt. tilsvarar dette berre 40 øre i døgnet. Det ser derfor ikkje ut til at det er mykje å spare på å skru av Focaults pendel i trange tidar.

```
n.exe "c:/ntnu/1_kl_vaar/matte_2/oblig pendel/plot.py"
total energy given from electromagnet =  0.00531360937158146 joule
```

Figure 5: Energi gitt frå elektromagneten/mista i form av luftmotstand kvar periode

4 konklusjon

Pendelet var $25.25 \pm 0.25m$ langt og energien elektromagneten i botn brukar er 0.054 kwt. pr.døgn som på Noreg sin høgaste straumkurs berre tilsvarar 40 øre i døgnet. Det ser derfor ikkje ut til at skulen har mykje å spare på stoppe pendelet under neste “energikrise”. Sjølv om elektromagneten skulle bli skrudd av vil det ta omlag 3 døgn før den vanlege mannen i gata vil seie pendelen er stoppa opp, men for den spesielt interreserte vil pendelen truleg kunne glede til straumprisane er nede att.

5 vedlegg

Koden er hovudsakeleg skriven i c++. under er headerfila til pendelklassen.

```
#pragma once

class Pendulum{
    public:
        //angle units
        double theta;
        double thetaDot;
        double thetaDoubleDot;

        //other units (SI);
        double pendulumLength;
        double gravitationalAcceleration;
        double airResistancePendulumConstant;

        Pendulum(); //constructor
        void angleAcceleration(); //radians per second squared
        void angleVelocity(double timestep); //radians per second
        void anglePlacement(double timestep); // randians (positive to right)

};
```

cpp Fil med funksjonane og deklarasjonane til pendelklassen.

```cpp
#include "pendulum.h"
#include <iostream>
#include <numbers>
#include <math.h> //power function

Pendulum::Pendulum(){
    //luftmotstandkonstantar
    double p, C_D, A, m;
    p = 1.225 ;  //fluidDensity
    C_D = 0.47; //airRessistanceCoeffisient
    A = 0.1 * 0.1 * 3.1415926535897932;   //crossection
    m = 32.9;   //mass

    pendulumLength = 25.2526;   //calculated with bigbrain mafs
    gravitationalAcceleration = 9.82147;
    airResistancePendulumConstant = 1/(2*m) * p * C_D * A * pendulumLength;

    theta = std::asin(0.97 / pendulumLength); // 0.97 meters from center to turnaround p
    thetaDot = 0; // start at turnarounf point velocity = 0
    thetaDoubleDot = (- gravitationalAcceleration / pendulumLength)*std::sin(theta); //
}

void Pendulum::angleAcceleration(){
    double airAccelerationResistance;
    if (thetaDot != 0){
        airAccelerationResistance = -airResistancePendulumConstant * (std::pow(thetaDot,3
        //from formula given in problem deffinition
        }
    else{
        airAccelerationResistance = 0; // not to get fuckups
    }


    double angleAccelerationInVacum = ( -gravitationalAcceleration / pendulumLength)*std
    //from formula given in problemdeffinition
    //thetaDoubleDot = angleAccelerationInVacum;//without airresistance
    thetaDoubleDot = angleAccelerationInVacum + airAccelerationResistance ; //with airres
}

void Pendulum::angleVelocity(double timestep){
    double angleVelocityIncresed = thetaDot + thetaDoubleDot * timestep;
    thetaDot = angleVelocityIncresed;
}

void Pendulum::anglePlacement(double timestep){
    double anglePlacementIncresed = theta + thetaDot * timestep;
    theta = anglePlacementIncresed;
}
```

main.cpp fila. Merk umatemtiske funksjonar som skriving til fil er ikkje dokumentert.

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <vector>
#include "Pendulum.h"
#include "Filemanipulator.h"


int main(){
    Pendulum focaultsPendulum{};
    double timestep = 0.01;
    double simulationEndTime = 201.5 / 20; // 10 periods
    double simulationTime = 0;
    std::vector<double>timevector;

    int measuringpoints = std::round(simulationEndTime / timestep);

    //data storage vectors
    std::vector<double> theta; //angle(t)
    std::vector<double> thetaDot; //angle velocity(t)
    std::vector<double> thetaDoubleDot; //angle acceleration(t)

    //memory variables easyer logic
    double prevTheta;
    bool thetaPositive = true;


    for (int i = 0; i < measuringpoints; i++){
        //store preveous steps so can store extremes.
        prevTheta = focaultsPendulum.theta;

        //calculate next step
        focaultsPendulum.angleAcceleration();
        focaultsPendulum.angleVelocity(timestep);
        focaultsPendulum.anglePlacement(timestep);

        simulationTime += timestep;

        /*
        //store only extremes. Comment out if detailed shorter timespan neded
        if ((prevTheta > focaultsPendulum.theta) && thetaPositive){
            thetaPositive = false;
            theta.push_back(std::abs(focaultsPendulum.theta));
            timevector.push_back(simulationTime);
        }
        if ((prevTheta < focaultsPendulum.theta) && !thetaPositive){
            thetaPositive = true;
            theta.push_back(std::abs(focaultsPendulum.theta));
            timevector.push_back(simulationTime);
        }
        */

        //store values

        theta.push_back(focaultsPendulum.theta);
        thetaDot.push_back(focaultsPendulum.thetaDot);
```

```
        thetaDoubleDot.push_back(focaultsPendulum.thetaDoubleDot);

        timevector.push_back(simulationTime);

    }

    //make it possible to write to file
    std::string thetaString = vectorToString(theta);
    std::string thetaDotString = vectorToString(thetaDot);
    std::string thetaDoubleDotString = vectorToString(thetaDoubleDot);
    std::string timeString = vectorToString(timevector);

    //write to file
    writeToFile("pendulumTheta.txt",thetaString);
    writeToFile("pendulumThetaDot.txt",thetaDotString);
    writeToFile("pendulumThetaDoubleDot.txt",thetaDoubleDotString);
    writeToFile("pendulumTime.txt",timeString);

    return 0;
}
```

Simuleringa blei lagra i filar og lese i python. Utrekninga for energitapet frå luftmotstanden blei gjort ved å itterere over vinkelfartdataen i funksjonen under og summert.

```
def AirResistanceEnergyLoss(velocity,timestep):
#assume constant speed in timestep
p = 1.225 #kg/m^3 (fluiddensity)
C_D = 0.47 #airressistasecoeffisient
A = 10**2 * 3.141592653589
distance = abs(velocity) * timestep
energy = 1/2 * p * velocity**2 * C_D * A * distance
return energy
```