Lasagneprosjekt

Lasse og Syvert

October 25, 2023

Abstract

The differential equations of the propagation of heat express the most general conditions, and reduce the physical questions to problems of pure analysis, and this is the proper object of theory.

-Joseph Fourier

1 Introduksjon

Vi skal finne den termiske diffusiviteten til lasagne. For å gjøre dette måler vi temperaturendring(avkjøling) i lasagnen over tid. I tillegg må vi ta geometrien til lasagnen i betrakting, samt plasseringen til punktet som måles. Vi har valgt å se på temperaturdifferansen mellom lasagnen og omgivelsene. Dermed vil grafene på figurene konvergere mot null og ikke romtemperatur.

2 Finne diffusiviteten

2.1 Analytisk

Den analytiske løsningen har vi lånt fra Nome:

$$u(\boldsymbol{x},t)=\frac{64T_0}{\pi^3}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{kmn}exp(-\alpha\pi^2 t((\frac{2k-1}{L_1})^2+(\frac{2m-1}{L_2})^2+(\frac{2n-1}{L_3})^2)\sin(\frac{k\pi x_1}{L_1})sin(\frac{k\pi x_2}{L_2})sin(\frac{k\pi x_3}{L_3}) \tag{1}$$

2.2 Numerisk

Vi begynner her:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\Delta T \tag{2}$$

For å komme fram til en numerisk løsning, må vi se på romlig- og tids-diskretisering.

Romlige diskretisering: Vi begynner med to vilkårlige taylor-rekker:

$$T_{m+1}=T(x_m+h)=T(x_m)+hT'(x_m)+\frac{h^2}{2}T''(x_m)+\frac{h^3}{6}T'''(x_m)+O(h^4) \tag{3}$$

$$T_{m-1}=T(x_m-h)=T(x_m)-hT'(x_m)+\frac{h^2}{2}T''(x_m)-\frac{h^3}{6}T'''(x_m)+O(h^4) \tag{4}$$

Her er h det romlige-steget.

Legger man disse sammen og løser for $T''(x_m)$ får man:

$$T''(x_m)=\frac{T_{m+1}-2T_m+T_{m-1}}{h^2}+O(h^2) \tag{5}$$

Denne er en-dimensjonal. I 3 dimensjoner blir ligningen åpenbart slik:

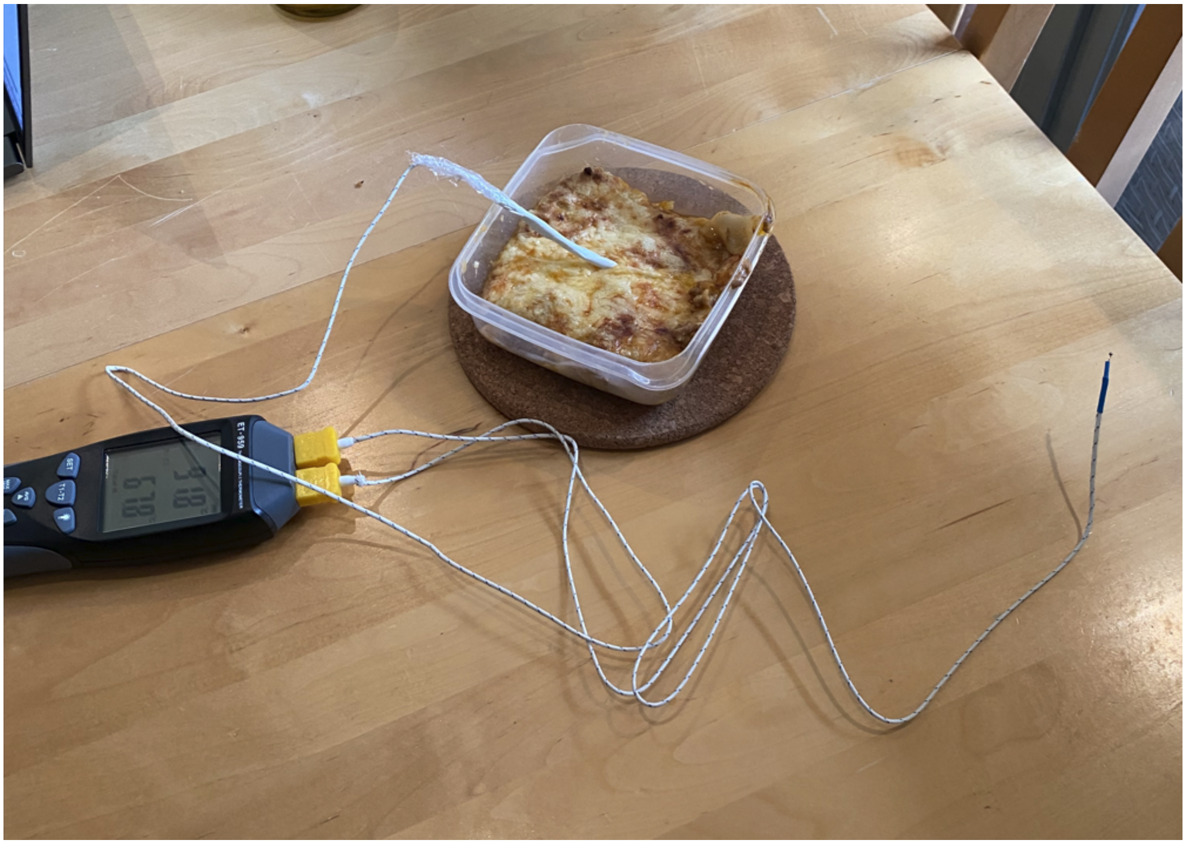


Figure 1: Oppsettet på lasagne-labben.

$$\Delta T = \frac{T_{i+1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i-1,j,k}}{h_x^2} + \frac{T_{i,j+1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j-1,k}}{h_y^2} + \frac{T_{i,j,k+1} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j,k-1}}{h_z^2} \tag{6}$$

Nice, nå har vi en numerisk måte å finne $\Delta T på$
Gjør vi det samme for tids-domenet:

$$\frac{\partial T^n(x_m, y_m, z_m)}{\partial t} = \frac{T^{n+1}_{i,j,k} - T^n_{i,j,k}}{\Delta t} \tag{7}$$

Når vi setter alt sammen og løser for $\mathrm{T}^{n+1}_{i,j,k}, fårvi$:

$$T^{n+1}_{i,j,k} = T^n_{i,j,k} + \alpha \Delta t \left(\frac{T^n_{i+1,j,k} - 2T^n_{i,j,k} + T^n_{i-1,j,k}}{h_x^2} + \frac{T^n_{i,j+1,k} - 2T^n_{i,j,k} + T^n_{i,j-1,k}}{h_y^2} + \frac{T^n_{i,j,k+1} - 2T^n_{i,j,k} + T^n_{i,j,k-1}}{h_z^2} \right) \tag{8}$$

Nå har vi noe vi kan lage python-script av. En brøkdel av pythonscriptet er vist i Figur 2.
Velger vi oss en punktsky på 24 x 24 x 10 punkter og plotter temperaturen til punktet i midten, med diffusiviteten α vi fant fra den analytiske delen, får vi veldig lik graf som den analytiske:

2.3 Bilder:

Vi har visualisert en bildeserie fra den numeriske løsningen som beskriver varmeflyten til lasagnen over tid.

Grafene under viser temperaturendring i midtpunktet for $\alpha = 0.012$:

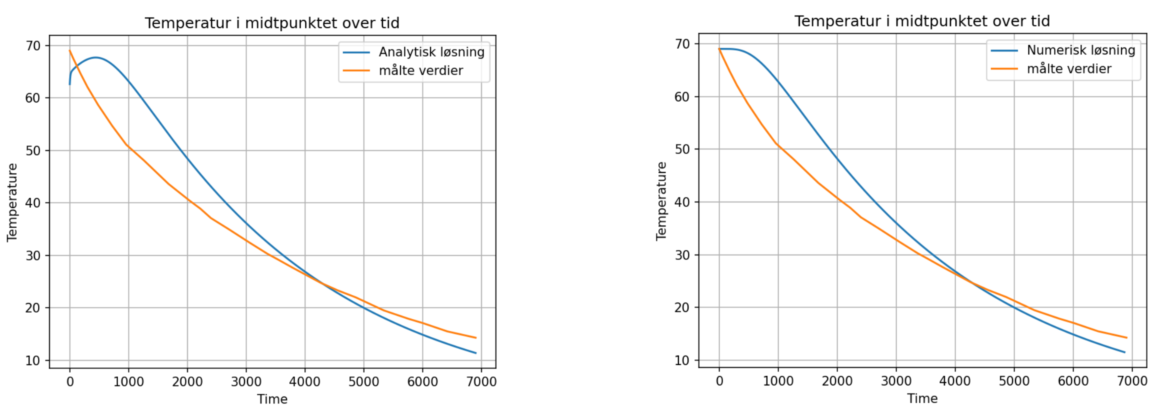
```python
for step in range(num_steps):

    for i in range(1, Nx):
        for j in range(1, Ny):
            for k in range(1, Nz):

                d2x = (theta[i+1, j, k] - 2 * theta[i, j, k] + theta[i-1, j, k]) / dx**2
                d2y = (theta[i, j+1, k] - 2 * theta[i, j, k] + theta[i, j-1, k]) / dy**2
                d2z = (theta[i, j, k+1] - 2 * theta[i, j, k] + theta[i, j, k-1]) / dz**2

                theta_new[i, j, k] = theta[i, j, k] + alpha * dt * (d2x + d2y + d2z)
```

Figure 2: Sentrale løkka i python. Grensene er valgt slik at randen alltid er 0 grader.



(a) Analytisk løsning (b) Numerisk løsning

Figure 3: Som vi ser samsvarer den analytiske løsningen bra med den numeriske.

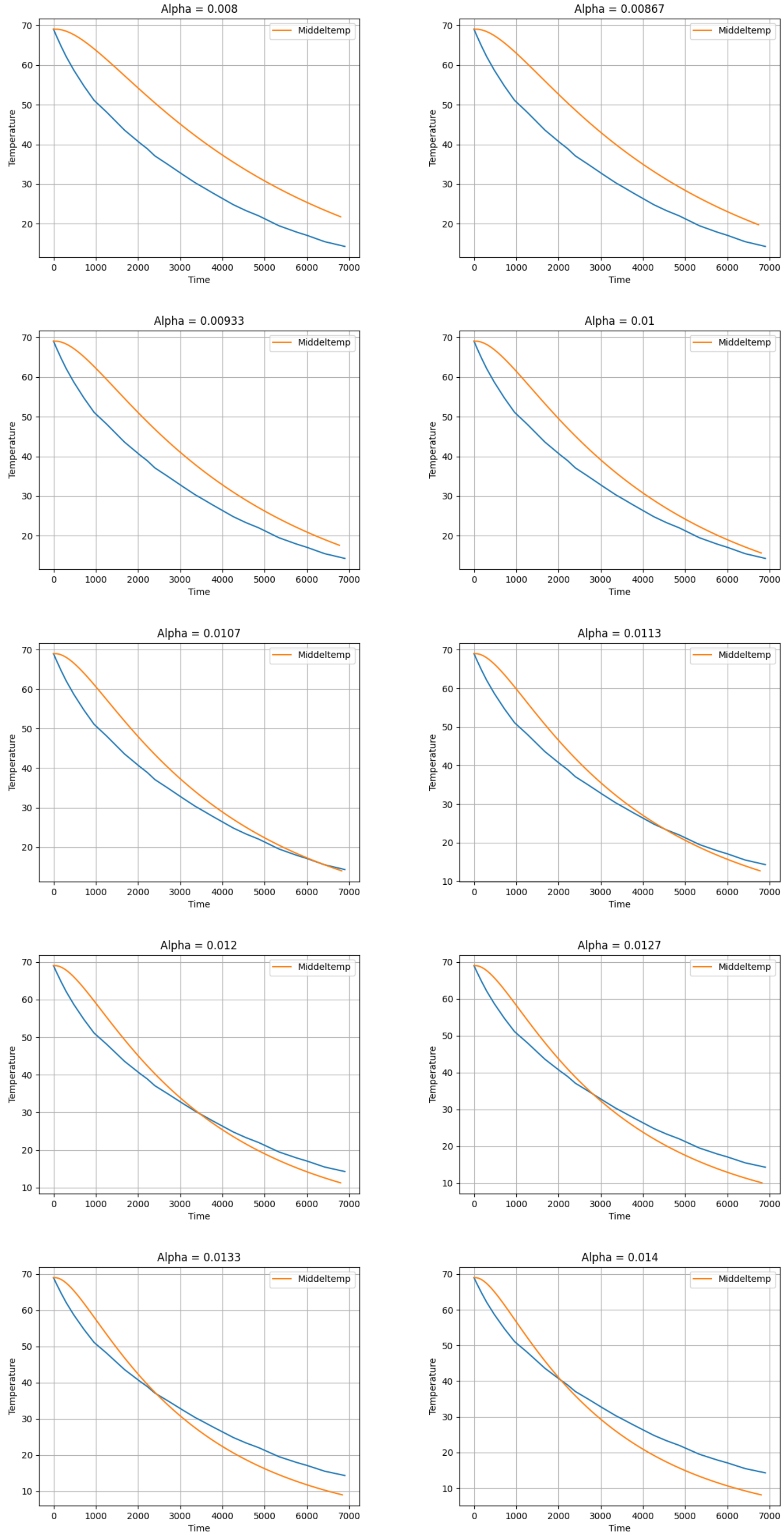


Figure 4: Brukte numerisk løsning for forskjellige α. Vi er mest fornøyd med $\alpha = 0.012$

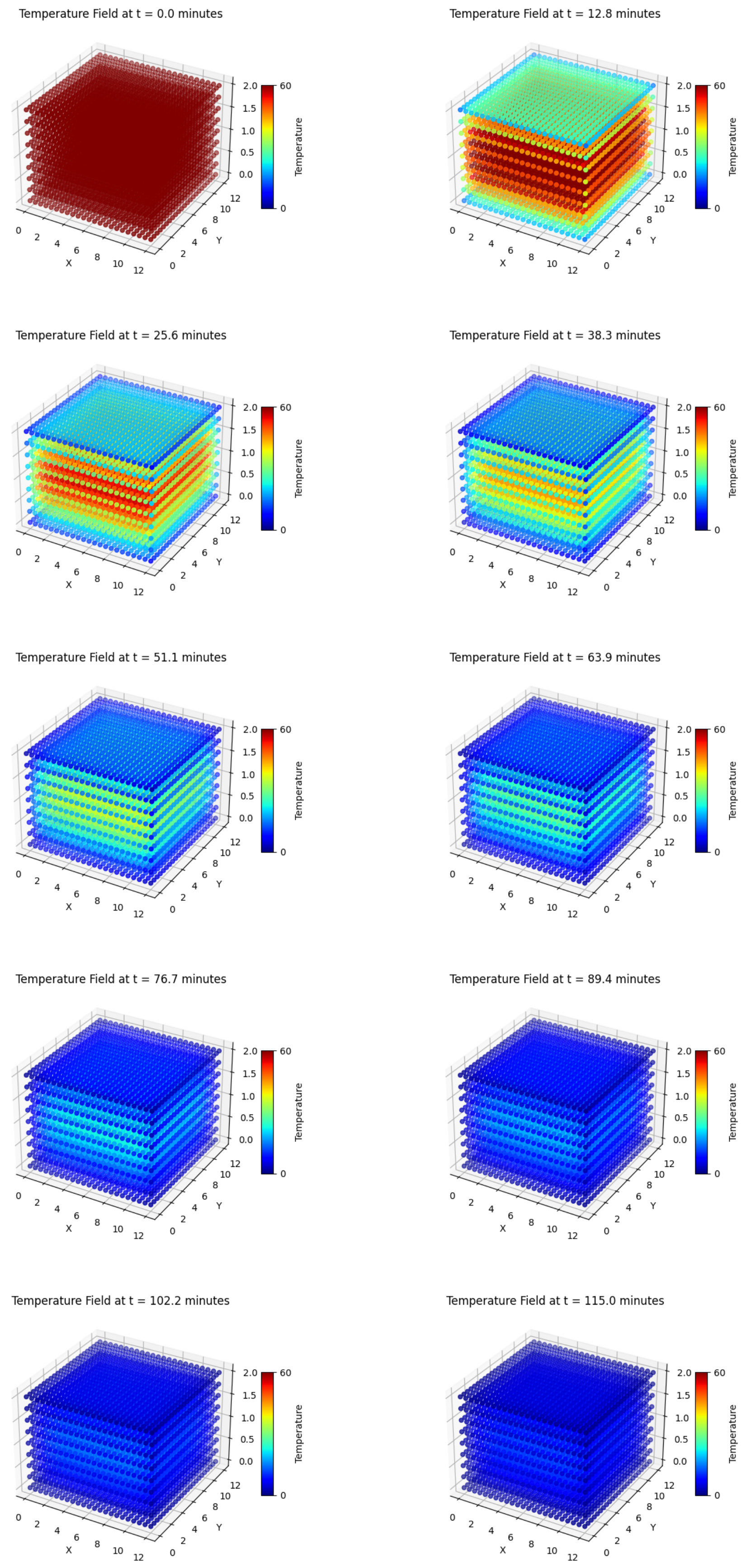


Figure 5: Her har vi plottet temperaturen til alle de diskritiserte punktene i den numeriske delen over tid.

3 Feilkilder

1. Varmeoverføring til underlag $\neq$ varmeoverføring til luft.
2. Termisk diffusivitet IKEA-boks $\neq$ Termisk diffusivitet lasagne.

3.1 Konklusjon:

Konklusjonen er sånn ca at $\alpha \approx 0.012 mm/s^2$

References