1

∇ i Kule kordinater:

Kartesisk til kulekordinater

$$x = r\cos\theta\sin\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\phi$$

$$\hat{e}_r = (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$$

$$\hat{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$\hat{e}_\phi = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi)$$

Betrakt $f(x, y, z)$. Da har vi

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{dr}$$

$$= \nabla f \cdot (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \nabla f \cdot (-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\phi, 0) r$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \nabla f \cdot (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi) r$$

Det gir oss

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial \phi}\right) = \nabla f \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\theta & -\sin\theta \sin\phi r & \cos\theta \cos\phi r \\ \sin\theta \sin\phi & \cos\theta \sin\phi r & \sin\theta \cos\phi r \\ \cos\theta & 0 & -\sin\phi r \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial \phi}\right) \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\theta & -\sin\theta \sin\phi r & \cos\theta \cos\phi r \\ \sin\theta \sin\phi & \cos\theta \sin\phi r & \sin\theta \cos\phi r \\ \cos\phi & 0 & -\sin\phi r \end{pmatrix}^{-1}$$

Finner invers ved å se at matrisen kan skrives som

$(\hat{e}_r, r\sin\phi\,\hat{e}_\theta, r\hat{e}_\phi)$

hvor $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ og $\hat{e}_\phi$ er ortonormale

Betrakt en matrise $\begin{pmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{pmatrix}$

Da er

$$\begin{pmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{pmatrix} (\hat{e}_r, r\sin\ \hat{e}_\theta, r\hat{e}_\phi)$$

$$= \begin{pmatrix} r_1 \cdot \hat{e}_r & r\sin\theta(r_1 \cdot \hat{e}_\theta) & r(r_1 \cdot \hat{e}_\phi) \\ r_2 \cdot \hat{e}_r & r\sin\theta(r_2 \cdot \hat{e}_\theta) & r(r_2 \cdot \hat{e}_\phi) \\ r_3 \cdot \hat{e}_r & r\sin\theta(r_3 \cdot \hat{e}_\theta) & r(r_3 \cdot \hat{e}_\phi) \end{pmatrix}$$

Ved å velge $r_1 = \hat{e}_r$, $r_2 = \frac{1}{r\sin\phi}\hat{e}_\theta$ og $r_3 = \frac{1}{r}\hat{e}_\phi$

blir matriseproduktet over lik

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Altså er

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_r^T \\ \frac{1}{r\sin\phi}\hat{e}_\theta^T \\ \frac{1}{r}\hat{e}_\phi^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\phi \\ -\frac{\sin\theta}{r\sin\phi} & \frac{\cos\theta}{r\sin\phi} & 0 \\ \frac{\cos\theta\cos\phi}{r} & \frac{\sin\theta\cos\phi}{r} & -\frac{\sin\phi}{r} \end{pmatrix}$$

inversen

$$\nabla f = (\partial_r f, \partial_\theta f, \partial_\phi f)\begin{pmatrix} \hat{e}_r^T \\ \frac{1}{r\sin\phi}\hat{e}_\theta^T \\ \frac{1}{r}\hat{e}_\phi^T \end{pmatrix}$$ Dette blir

$$\boxed{= \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{1}{r\sin\phi}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{e}_\phi}$$

som ønsket

3)

Utledningen kan man finne på wikipedia.

Finner Δf i kulekoordinater ved bruk av

$$\nabla \cdot f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r\sin\phi}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}(f_\phi \sin\phi) + \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}\right)$$

og

$$\nabla f = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial r}}_{f_r} e_r + \underbrace{\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}}_{f_\theta} e_\theta + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}}_{f_\phi} e_\phi$$

Utledning

Vi bruker $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$

Vektorfeltet vi tar divergensen til er altså ∇f.

Dermed

$$\nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\phi}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right) \quad (*)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\phi}\left(\frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\cdot\frac{1}{r\sin\phi}\right)$$

$$\boxed{= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2\tan\phi}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}}$$

Fra (*) ser man at dette også kan skrives som

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi \frac{\partial f}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

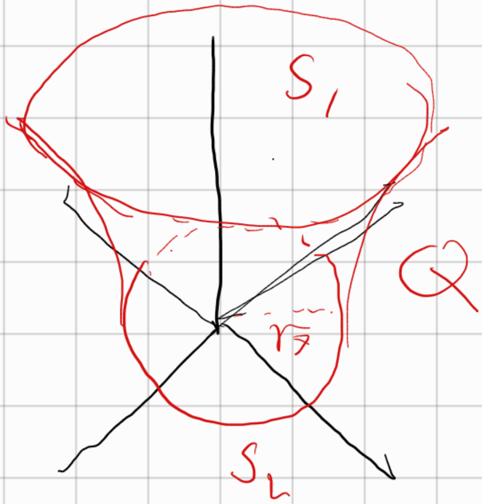
5)

La T være begrenset av flatene
$z = \sqrt{x^2+y^2-7}$, $z=0$ og $z=2$

La $f(x,y,z) = (x-z,\ x+y,\ z+1)$

Merk

$\partial T = S_1 \cup S_2 \cup Q$



Finn $\iint_Q f \cdot \hat{n}\, dS$

Løsning:

Ved divergensteoremet har vi

$$\iint_Q f\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_T \nabla\cdot F\, dV - \iint_{S_1} f\cdot\hat{n}\,dS - \iint_{S_2} f\cdot\hat{n}\,dS$$

Regner ut:

$\nabla \cdot F = 1 + 1 + 1 = 3$

sylindler kordinater

Det gir $\iiint_T \nabla \cdot F \, d = 3 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z^2+7}} r \, dr \, d\theta \, dz$

$= 6\pi \int_0^2 \frac{z^2+7}{2} \, dz$

$= 6\pi \left(\frac{z^3}{6} + \frac{7}{2} z \right)_0^2 = 50\pi$

$(0,0,1)$

$z = 2$

$\iint_{S_1} f \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} (z+1) \, dS$

$(0,0,-1)$

$= 3 \text{ areal}(S_1) = 33\pi$

$\iint_S f \cdot \vec{n} \, dS = - \text{Areal}(S_2) = -7\pi$

Det gir $\iint_Q f \cdot \vec{n} \, dS = 50\pi - 33\pi + 7\pi$

$= \underline{24\pi}$

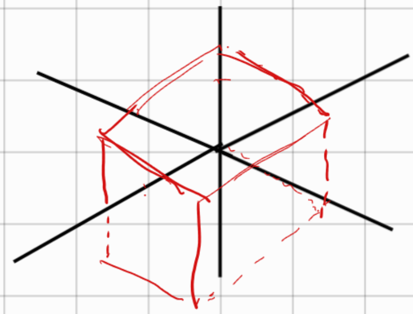
5 Tom Lindstrøm

Bruk Divergensteoremet til å regne ut flateintegralet

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS \text{ når}$$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, -y^2, z^3)$$

Der T er overflaten til kuben med sidelengde 2 og sentrum i origo



Vi har $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2 - 2y + 3z^2$

Divergensteoremet gir

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_V 2 - 2y + 3z^2\, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2 - 2y + 3z^2\, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (4 - 4y + 6z^2)\, dy\,dz$$

$$= \int_{-1}^{1} (8 + 12 \cdot z^2)\, dz$$

$$= 16 + (4 \cdot z^3)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \underline{\underline{24}}$$

14 Tom Lindstrøm

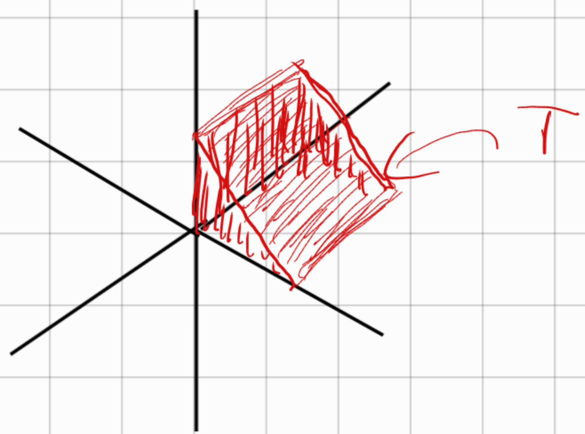
La vektorfeltet $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være

$$F(x, y, z) = (xy, z, x + y)$$

La V være området avgrenset av de tre kordinatplanene pluss planene $y = 4$, og $x + z = 4$.

Finn $\int_T F \cdot \hat{n}\, dS$ der T er overflaten til V og $\hat{n}$ peker ut av planet.

Tegner figuren



Ved divergensteoremet har vi

$$\iint_T F\cdot\hat{n}\,d = \iiint_V \nabla\cdot F\,dx\,dy\,dz$$

Merk: $\nabla\cdot F = y + 0 + 0 = y$

Så vi får

$$\iint_T F\cdot\hat{n}\,dS = \underbrace{\iiint_V y\,dx\,dy\,dz}_{(*)}$$

Husk:

Massemiddelpunkt

$$\bar{y} = \frac{\iiint y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{M}$$

Vi ser at integralet $(*)$ kan skrives

$$= \bar{y}\cdot M$$

hvor vi har valgt $\rho(x,y,z) = 1$

Med en uniform massefordeling er det innlysende at $\bar{y} = 2$, altså midt mellom endepunktene av V med hensyn til y aksen.

Videre kan vi regne ut M som volumet til V.

Altså $M = \frac{\text{høyde} \cdot \text{bredde}}{2} \cdot \text{lengde}$

$$= \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{2} = 32$$

Dermed får vi

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \hat{n} \, dS = \bar{y} M = 2 \cdot 32 = \underline{\underline{64}}$$

9 Tom Lindstrøm

La S være flaten som fremkommer når vi roterer $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}$ om x-aksen

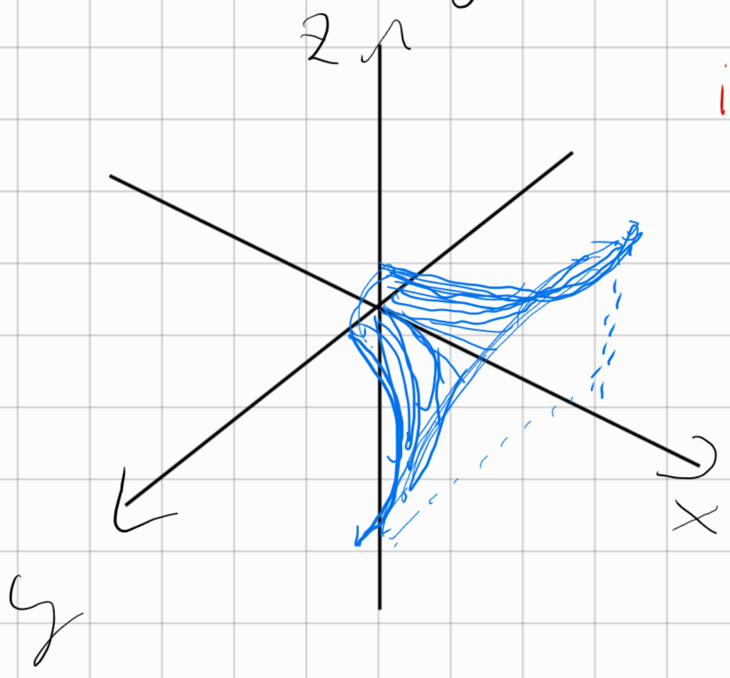
La F være vektorfeltet
$F(x, y, z) = (x, y, z)$

La T være den delen av S hvor $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$

Regn ut fluksintegralet $\iint_T F \cdot \hat{n} \, dS$

Løsning

Tegner figur av T.



ikke så lett å tegne
Prøv Geogebra

Sammen med flatene $x=0$, $x=1$
$y=0$ og $z=0$, avgrenser T et
område V i rommet.

Vi får tilsammen fem flateintegraler
La oss se på tilfellene isolert.

$\underline{x=0}$

Det gir $\hat{n} = (-1, 0, 0)$

$$F(0, y, z) = (0, y, z)$$

Som gir $F \cdot \hat{n} = 0$

$\underline{x=1}$

Det gir $\hat{n} = (1, 0, 0)$

og $F(1, y, z) = (1, y, z)$

Som gir $F \cdot \hat{n} = \underline{1}$

Dermed blir flateintegralet over
denne flaten lik arealet, som
er en kvart sirkel med radius
$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$ fra likningen $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}$

Dette gir $\underline{\frac{9\pi}{64}}$

$\underline{y = 0}$

Det gir $\hat{n} = (0, -, 0)$

og $F(x, 0, z) = (x, 0, z)$

som gir $F \cdot \hat{n} = \underline{0}$

$\underline{z = 0}$

Det gir $\hat{n} = (0, 0, -1)$

og $F(x, y, 0) = (x, y, 0)$

som gir $F \cdot \hat{n} = \underline{0}$

Videre har vi $\nabla \cdot F = 3.$

Ved divergensteoremet har vi da

$$\iint_T F \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot F \, dV - \frac{9\pi}{64}$$

Bruker Sylinder Kordinater

$$= 3 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}} r \, dr \, d\theta \, dx - \frac{9\pi}{64}$$

Merk at θ ikke oppstår i integranden

$$= \frac{3\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)^2 dx - \frac{9\pi}{64}$$

$$= \frac{3\pi}{4}\int_0^1 \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{16}\right)dx - \frac{9\pi}{64}$$

$$= \frac{3\pi}{4}\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\right) - \frac{9\pi}{64}$$

$$= \frac{47}{320}\pi - \frac{9\pi}{64} = \underline{\underline{\frac{\pi}{160}}}$$