Øvingsforelesning 2

$\boxed{1}$ Bruk retningsderivert og utled uttrykket for gradienten i kulekoordinater:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} e_\varphi$$

$\boxed{3}$ Utled uttrykket for divergensen i kulekoordinater:

$$\nabla \cdot f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 f_r\right) + \frac{1}{r\sin\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(f_\varphi \sin\varphi\right) + \frac{\partial f_\theta}{\partial\theta}\right)$$

Nå kan du få tak i laplaceoperatoren i kulekoordinater ved å huske at $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$.

$\boxed{5}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av flatene $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 7}$, $x_3 = 0$ og $x_3 = 2$. La vektorfeltet $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$f(x) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2, x_3 + 1).$$

Hva er fluksen ut av den krumme delen til randen til T?

$\boxed{1}$ Bruk retningsderivert og utled uttrykket for gradienten i kulekoordinater:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} e_\varphi$$

Oppgaver hentet fra kapittel 6.14 i flervariabel analyse med lineær Algebra (Tom Lindstrøm og Klara Hveberg)

5. Bruk divergensteoremet til å regne ut flateintegralet $\int_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ når

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$$

og T er overflaten til området V avgrenset av planene $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.
Enhetsnormalen skal peke ut av V.

14. I denne oppgaven er $\mathbf{F}$ vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + (x + y)\,\mathbf{k}$.

a) Avgjør om $\mathbf{F}$ er en gradient eller en curl.

b) La V være området avgrenset av de tre kordinatplanene pluss planene $y = 4$ og $x + z = 4$. Finn $\int_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ der T er overflaten til V og $\mathbf{n}$ peker ut av V.

9. I denne oppgaven er S flaten som fremkommer når vi roterer grafen $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}$ om x-aksen, og $\mathbf{F}$ er vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

a) La T være den delen av S hvor $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$. Finn flateintegralet $\int_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ ved direkte utregning.

b) Regn ut integralet i a) ved å bruke divergensteoremet.