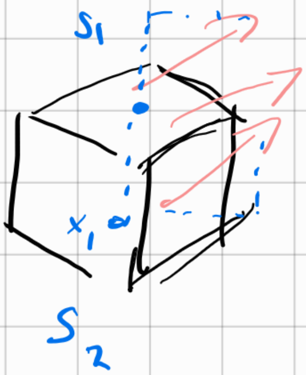
Divergensteoremet

Del I Teori



Kube med lengde h
Sentrum x_1

$$S_1 = \left(\hat{n}_z \cdot F(x_1 + h\hat{e}_z)\right) h^2$$

$$S_2 = -\left(\hat{n}_z \cdot F(x_1)\right) h^2$$

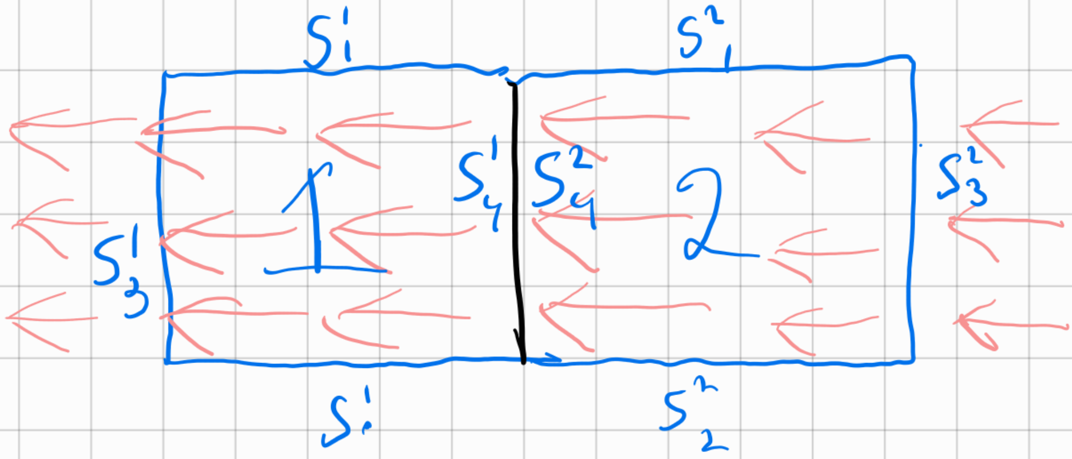
$$S_1 + S_2 = h^3 \left(\hat{n}_z \cdot \frac{\left(F(x_1 + h\hat{e}_z) - F(x_1)\right)}{h}\right)$$

$$\approx h^3 \left(\hat{n}_z \frac{\partial F}{\partial z}(x_1)\right)$$

Likedans

$$S_{tot}(x_1) \approx \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_1) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_1) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x_1)\right) h^3$$

$$= \nabla \cdot F(x_1)\, h^3$$



Merk $S_4^1 = -S_4^2 \Rightarrow S_4^1 + S_4^2 = 0$

som gir

$$F_{tot} = S_1^1 + S_2^1 + S_3^1 + S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

$$= (S^1 + S_2^1 + S_3^1 + S_4^1) + (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2)$$

$$= S_1 + S_2$$

Generelt betrakt et område

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

Del inn i kuber

$$F_{tot} = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \hat{n} \, dS \simeq \sum_{\text{kuber}} \underbrace{(\nabla \cdot F)}_{\substack{\text{evaluert i} \\ \text{midtpunkt} \\ \text{til kube}}} h^3$$

$$\longrightarrow \iiint_{\Omega} \nabla \cdot F \, d^3x$$

Det gir

$$\int_{\partial\Omega} F(x)\cdot\hat{n}\, dS = \int_{\Omega} \nabla\cdot F\, d^3x$$

Divergensteoremet:

Anta $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ er en lukket begrenset delmengde og at $\partial\Omega$ er stykkevis Glatt.

La $\hat{n}$ være enhetsnormalvektoren som peker ut av overflaten $\partial\Omega$.

Anta F er et vektorfelt med kontinuerlige derivete i $\bar{\Omega}$

Da er $$\iiint_{\Omega} \nabla\cdot F\, dV = \iint_{\partial\Omega} F\cdot\hat{n}\, dS$$

Korollar: Gauss formel

under de samme antagelsene om Ω. La u ha kont andrederiverte.

$$\iiint_{\Omega} \Delta u \, dV = \iint_{\partial\Omega} \nabla u \cdot dS$$

Bevis:

La $F(x,y,z) = \nabla u$

Merk at $\nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u$

Ved divergensteoremet følger teoremet trivielt.

Korollar: Greens 1. identitet

Under de samme antagelsene om Ω la u ha kont andrederiverte og v kontinuerlige første deriverte.

$$\int_{\Omega} \Delta u v + \nabla v \cdot \nabla u \, dV = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \hat{n} \, dS$$

Bevis:

La $F = v\nabla u$

$\nabla F = \nabla v \cdot \nabla u + v\Delta u$

Divergensteoremet gir dermed resultatet. $\blacksquare$

Del 2 Eksempler

Eksempel 6.14.4 Tom Lindstrøm.

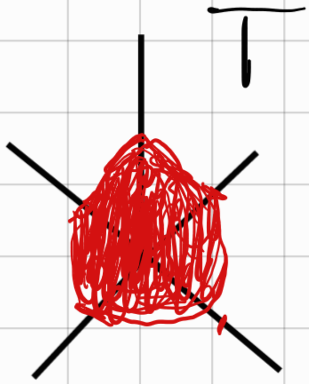
La T være den delen av paraboloiden $z = 9 - x^2 - y^2$ som ligger over xy planet

Regn ut $\int F \cdot n \, dS$ hvor

$F(x,y,z) = (x+y^2, \cos(x^2 z), 2-z)$

der $\vec{n}$ peker oppover.

Løsning



Ved å legge til sirkelskiven

$S = \{(x,y,0) ; x^2+y^2 \le 9\}$

får vi et avgrenset område

Dermed

$$\iint_{\substack{\text{Total}\\\text{overflate}}} F\cdot\hat{n}\,dS = \iint_T F\cdot\hat{n}\,dS + \iint_S F\cdot\hat{n}\,dS$$

Ved divergensteoremet gir dette.

$$\iint_T F\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_{\substack{\text{Total}\\\text{volum}}} \nabla\cdot F\,dV - \iint_S F\cdot\hat{n}\,dS$$

Vi har $\nabla\cdot F = \frac{\partial}{\partial x}(x+y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\cos(x^2 z)) + \frac{\partial}{\partial z}(2-z)$

$$= 1 + 0 - 1 = 0$$

Dermed

$$\iint_T F\cdot\hat{n}\,dS = -\iint_S F\cdot\hat{n}\,dS$$

For S har vi $\hat{n} = (0,0,-1)$ siden $\hat{n}$ skal peke ut av overflaten gitt av T og S sammensatt.

Det gir $F(x,y,0)\cdot\hat{n} = (2-0)(-1) = -2$

Altså

$$\iint_T F\cdot\hat{n}\,dS = -\iint_S (-2)\,dS$$

Areal av sirkel med $r=3$

$$= 2\iint_S dS = 2\underbrace{(\pi\cdot 3^2)}_{} \boxed{= 18\pi}$$

Eksempel 6.14.5 Tom Lindstrøm

La $F(x,y,z) = -\frac{r}{|r|^3} = \left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$

For $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

Merk at $\nabla\cdot F = 0$

siden $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$

og tilsvarende for y og z.

La $B(0,R)$ være ballen med radius R og sentrum 0. Da har vi

$$\iint_{\partial B} F\cdot\hat{n}\,dS = -\iint_{\partial B} \frac{r}{|r|^3}\cdot\hat{n}\,dS = -\iint_{\partial B}\frac{1}{|r|^2}\,dS$$

siden $\hat{n} = \frac{r}{|r|}$

$$= \frac{-1}{R^2} \text{Areal}(\partial B) = -\frac{4\pi R^2}{R^2}$$

$$= -4\pi$$

Om vi her hadde brukt divergensteoremet uten å tenke oss om hadde vi derimot fått

$$\iint_{\partial B} F \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_{B} \nabla \cdot F\, dV = 0$$

Som er feil. Hvorfor?

Vi har et hull i punktet $(0,0,0)$ siden her er F udefinert. Dermed oppfylles ikke kravet til divergensteoremet.

Betrakt istedenfor

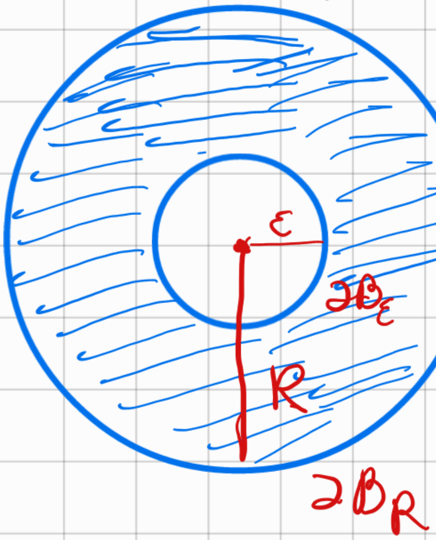
$$B_{R,\varepsilon} (X \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon \leq |X| \leq R) \qquad \varepsilon > 0$$

Vi har et hull i formen av en ball med radius ε om origo.

Merk at F er veldefinert på $B_{R,\varepsilon}$.

Videre har vi $\partial B_{R,\varepsilon} = \partial B_R \cup \partial B_\varepsilon$

2 dim analog tegning for disk



Utover enhetsnormal peker utover fra ∂B_R og innover for ∂B_ε.

Dermed blir riktig bruk av divergensteoremet.

Siden enhets-normal har motsatt orientering for ∂B_ε

$$\iiint_{B_{R,\varepsilon}} \nabla \cdot F \, dV = \iint_{\partial B_R} F \cdot \hat{n} \, dS - \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \hat{n} \, dS$$

Ved beregningen over har vi at

$$\iint_{\partial B_R} F \cdot \hat{n} \, dS = \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \hat{n} \, dS = -4\pi$$

som stemmer med ∂A

$$\iiint_{B_{R,\varepsilon}} \nabla \cdot F \, dV = 0$$

Greens som 2d Analog til divezens teoremet.

La $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
La A være en flate i planet med parametrisering av ∂A $r(t)$.

Vi har $r'(t) = \left(\frac{dr_1}{dt}, \frac{dr_2}{dt} \right)$

og $n(t) = \left(\frac{dr_2}{dt}, -\frac{dr_1}{dt} \right)$

Som utover normal.

Greens gir

$$\int_{\partial A} -f_2 \, dx + f_1 \, dy = \iint_A \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial(-f_2)}{\partial y} \, dA$$

$$= \iint_A \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \, dA$$

Alltså

$$\int_{\partial A} F \cdot \hat{n} \, dr = \iint_{A} \nabla \cdot F \, dA$$