4 - 9 - TRANSPORT

Det er en vanlig misforståelse at hyperventilering øker konsentrasjonen av oksygen i blodet ditt slik at du kan holde pusten lenger. Dette er feil. Sentralnervesystemet ditt monitorerer karbondioksidnivået i blodstrømmen din, ikke oksygennivået, og når du hyperventilerer tapper du blodstrømmen for karbondioksid slik at du komfortabelt kan holde pusten lenge på blodstrømmens normale oksygeninnhold. Det er derfor livsfarlig å hyperventilere i vann - hvis du går tom for oksygen med altfor lite karbondioksid i blodet, kan du besvime uten å ha kjent behovet for å trekke pusten. [1] La oss derfor regne litt på transport - det står om liv og død. Kontinuitetslikningen er

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

Hvis vi gjør den forenklende antagelse at v er konstant, får vi **transportlikningen**

$$\dot{\rho} + v \cdot \nabla \rho = 0.$$

Det er vanlig å starte med observasjonen at ρ må være konstant på et sett med rette linjer. Disse kalles likningens **karakteristiske kurver**.

$\boxed{1}$ Finn dem.

Det er vanlig å slenge på et initialkrav:

$$\rho(x, 0) = g(x).$$

I lys av forrige oppgave, vil differensiallikningen ikke gjøre noe annet enn å transportere g bortetter, det er derfor den heter "transportlikningen".

$\boxed{2}$ Løs transportlikningen med initialkrav. Det er overraskende enkelt om du bruker de karakteristiske kurvene.

[1] Med fridykkere skjer dette gjerne rett før de når overflaten:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Freediving_blackout`

Fra nå av skal vi holde oss til én romlig dimensjon, og så skal vi tenke at vi har en blodåre som går parallelt med e_1. Dersom ρ for eksempel er oksygentettheten og denne blir transportert ut gjennom blodåreveggene, er

$$\dot{\rho} + v \cdot \nabla\rho + \gamma\rho = 0.$$

en enkel modell. Modellen antar transporten ut gjennom veggene er proporsjonal med konsentrasjonen dersom $\gamma > 0$.

$\boxed{3}$ Løs. Bruk de karakteristiske kurvene fra forrige side.

La oss nå tenke at det kommer en blodåre inn på hovedblodåren og sprøyter blod med en annen oksygenkonsentrasjon inn i åren. Dette kan vi modellere ved å slenge på en innsprøytning f på høyreseiden slik:

$$\dot{\rho} + v \cdot \nabla\rho = f$$

$\boxed{4}$ Denne kan du også løse ved å se på hvordan ρ oppfører seg på de karakteristiske kurvene fra forrige oppgave.

Dersom blodåren har varierende tverrsnittsareal, vil hastigheten øke der blodåren blir trangere. Tillater vi at hastigheten varierer med rom, får vi modellen

$$\dot{\rho}(x,t) + v(x) \cdot \nabla\rho(x,t) = 0.$$

$\boxed{5}$ Finn karakteristiske kurver for dette problemet.

Det er vanlig å lære seg å håndtere $v(x) = ax+b$, for da kan man håndtere alle mulige enkle modeller der blodåreveggen ser ut som en rett linje sett fra siden.

$\boxed{6}$ Løs

$$\dot{\rho}(x,t) + (ax+b) \cdot \nabla\rho(x,t) = 0.$$

(Begynn med $v(x) = x$ om du synes det er litt hårete.)

Hvis vi går helt tilbake til kontinuitetslikningen

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

og tolker ρ som tettheten av biler på en motorvei og v som farten til trafikken i punktet (x, t), sier den at ingen biler kan forsvinne eller oppstå midt på veien. Det er også naturlig å modellere det slik at v er en funksjon av $\rho(x, t)$ istedet for (x, t), siden høyere biltetthet som regel medfører lavere fart. Det enkleste valget er **greenshieldsmodellen**, som antar at

$$v(\rho) = v_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$$

der v_m er fartsgrensen og ρ_m er maksimal biltetthet på veien. Vi setter begge disse til én for enkelhets skyld. og da får vi **traffiklikningen**

$$\dot{\rho} + (1 - 2\rho)\nabla\rho = 0.$$

$\boxed{7}$ Vis dette.

Dersom vi lar v avhenge av ρ, får modeller som er litt i morsomste laget for oss, men vi kan komme oss litt på vei før det blir for vanskelig. La oss varme opp med **Burgers likning**:[2]

$$\dot{\rho} + \rho\nabla\rho = 0$$

$\boxed{8}$ Finn kurvene der ρ er konstant. Får du det til kan du prøve trafikklikningen også.

Det finnes de som mener at man kan slenge på et diffusjonsledd for å ta høyde for at trafikanter senker farten når de ser at det er høyere biltetthet lenger frem:

$$\dot{\rho} + \rho\nabla\rho = \alpha\Delta\rho$$

Dersom vi nå skriver

$$\dot{\rho} = -v\nabla\rho + \alpha\Delta\rho + f$$

har vi det som vanligvis kalles en **konveksjonsdiffusjonslikning**.[3] Leddet $-\rho\nabla\rho$ gir konveksjonens bidrag til endring i konsentrasjon, mens $\alpha\Delta\rho$ gir diffusjonen og f er innsprøytning. Hvis du husker tilbake til hvordan vi utledet varmelikningen i forrige uke, vil du kanskje se at denne og kontinuitetslikningen utledes temmelig likt - forskjellen er at man i det ene tilfellet antar at v står for transport av masse, mens idet andre antar at det er Ficks diffusjonslov som gjør det. Likningen over er en grov modell for det som skjer når du tømmer blodet ditt for karbondioksid. Karbondioksid produseres i mitokondriene og i cytoplasma, og mekanismen for å få det gjennom interstisiet og ut i blodstrømmen er faktisk diffusjon. Så transporteres det med blodstrømmen til lungene der diffusjon nok en gang sørger for å få det ut i luften som skal pustes ut. Hvis du fyller lungene med luft oftere enn nødvendig, sørger du for å ha høy konsentrasjonsgradient over cellemembranen i lungene, og da er det mulig å tappe ut karbondioksid fortere enn resten av kroppen din produserer det.

Egentlig skulle vi nå fortsatt med såkalt **koblet transport** - det er nemlig slik at Ohms lov, Ficks lov for diffusjon, Fouriers lov for varmetransport og Hookes fjærlov bare er diagonalelementene i en større tabell av empiriske lover.[4] En spenningsgradient kan indusere varmeflyt (peltiereffekten), og temperaturgradient kan indusere elektrisk strøm (seebeckeffekten). Mekanisk stress kan gi diffusjon og dette kalles osmose. Og så videre og så videre. Jeg har ikke funnet noen lavthengende matematiske frukter vi kan herje med innen dette, så vi får la det ligge inntil videre.

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Burgers'_equation`
[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/Convection-diffusion_equation`
[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Onsager_reciprocal_relations`