4 - 8 - VARME

I fluiduken utledet vi kontinuitetslikningen

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

der tettheten ρ er gitt i kilo per kubikkmeter og farten v er gitt i meter per sekund. Men vi kunne like gjerne tenkt at ρ var konsentrasjon, altså mol per liter, og gjort det samme regnskapet. **Ficks diffusjonslov** sier at ved diffusjon er partikkelflukstettheten (altså integranden i fluksintegralet som måler hvor mye som går ut av Ω) er proporsjonal med konsentrasjonsgradienten - masse strømmer spontant fra områder med høy konsentrasjon til områder med lav konsentrasjon.

$\boxed{1}$ Bruk denne snasne empiriske regelen til å utlede diffusjonslikningen

$$\dot{\rho} = D\Delta\rho$$

der D er Ficks diffusjonskonstonstant.[1]

Vi kunne også uledet denne likningen ved å se på varmeenergi. Da måtte vi tatt utgangspunkt i kontinuitetslikningen for varmeenergi

$$\rho c\dot{T} + \nabla \cdot q = 0$$

der c er den spesifikke varmekapasiteten, målt i joule per kelvin per kilo, T er temperaturen og q er varmeflukstettheten, målt i watt per kvadratmeter per sekund. Endringen i varmeenergi i Ω skyldes enten varme som produseres inne i Ω (tenk at det står et stearinlys og brenner inne i Ω), eller varme som slipper inn og ut gjennom randen $\partial\Omega$. I likningen over er sistnevnte utelatt av hensyn til din kognitive last.

$\boxed{2}$ Utled kontinuitetslikningen for varmeenergi.

Transport av varmeenergi er for mange materialer proporsjonal med temperaturgradienten. Dette kalles **Fouriers lov**,[2] og skrives

$$q = -\kappa\nabla T$$

der κ er den termiske konduktiviteten.

$\boxed{3}$ Bruk denne snasne empiriske regelen til å utlede **varmelikningen**[3]

$$\rho c\dot{T} = \kappa\Delta T.$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Mass_diffusivity
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_conduction
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation

I studiet av differensiallikninger pleier man å starte med å sette opp et problem man kan vise har entydig løsning, for eksempel dirichletproblemet[4]

$$\dot{u} = \Delta u \text{ på } \Omega \times [0, \infty) \qquad u = f \text{ på } \partial\Omega \times \{t = 0\} \qquad u = g \text{ på } \partial\Omega \times [0, \infty)$$

Her har vi dirichletrandkrav og et initialkrav - f er varme- eller konsentrasjonsfordelingen ved $t = 0$ og g er temperaturen som holdes fast på $\partial\Omega$. Det vises maksminprinsipper og entydighet og så videre, men det er for grisete for oss. Dersom vi setter $f = 0$ får vi det homogene dirichletproblemet

$$\dot{u} = \Delta u \text{ på } \Omega \times [0, \infty) \qquad u = 0 \text{ på } \partial\Omega \times \{t = 0\} \qquad u = g \text{ på } \partial\Omega \times [0, \infty)$$

Vi kan også kreve at $\partial\Omega$ er isolert, altså at Ω er pakket inn i Glava (ved varmetransport) eller diffusjonssperre (ved diffusjon), og da får vi **det homogene neumannproblemet**[5]

$$\dot{u} = \Delta u \text{ på } \Omega \times [0, \infty) \qquad \frac{\partial u}{\partial e_n} = 0 \text{ på } \partial\Omega \times \{t = 0\} \qquad u = g \text{ på } \partial\Omega \times [0, \infty)$$

Begge de homogene problemene har vi løst i Ã©n romlig dimensjon i TMA4106. Dirichletproblemet

$$\dot{u}(x,t) = \alpha u''(x,t) \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad u(x,0) = f(x)$$

har løsning

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\alpha n^2 t} \cos(nx) \qquad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

mens neumannproblemet

$$\dot{u}(x,t) = \alpha u''(x,t) \qquad u'(0,t) = u'(\pi,t) = 0 \qquad u(x,0) = f(x)$$

har løsning

$$u(x,t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha n^2 t} \cos(nx) \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx.$$

La oss begynne med å studere disse litt mer. Som du ser er løsningene satt sammen av massevis av basisfunksjoner som er ortogonale på $(0, \pi)$. I TMA4106 viste vi dette ved å bruke egenskapene ved sinus- og cosinusfunksjonene.

$\boxed{4}$ Men ortogonaliteten følger faktisk direkte av randkravene og egenvektorlikningen

$$-y''(x) = \lambda y(x)$$

for både dirichlet- og neumannproblemet. Vis dette.

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_problem

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Neumann_boundary_condition

Denne ideen kan vi spinne videre på i $\mathbb{R}^3$. Det er kun mulig å sette opp eksplisitte løsninger for noen få pene geometrier kombinert med gunstige randkrav. Skal vi komme igang, må vi først separere variable. La oss heretter slå sammen de fysiske konstantene i

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}$$

slik at varmelikningen blir

$$\dot{u} = \alpha \Delta u.$$

$\boxed{5}$ Vis at dersom du antar $u(x,t) = z(t)y(x)$, må vi ha

$$\dot{z} + \alpha\lambda z = 0 \qquad \text{og} \qquad y + \lambda \Delta y = 0.$$

Nå skjer det samme som i TMA4106, løsningen til den første er bare å skrive opp:

$$z(t) = e^{-\alpha\lambda t} \tag{1}$$

Integrasjonskonstanten trengs ikke, av samme grunn som i 4106. For å komme videre nå, trenger vi enda en versjon av divergensteoremet:

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot dS$$

$\boxed{6}$ Utled.

Løsninger av $y = \lambda \Delta y$ og dirichletrandkrav kalles **egenfunksjonene** til dirichletproblemet, og tilsvarende for neumannproblemet. Egenfunksjoner som korresponderer til forskjellige egenverdier er ortogonale med hensyn på indreproduktet

$$(f,g) = \int_\Omega fg \, dx$$

dersom randkravene er homogene.

$\boxed{7}$ Vis.

Det kan også vises at egenverdiene er reelle og positive. Det er litt teknisk og vi dropper det.

$\boxed{8}$ Men nå foreslår jeg at du skriver opp et forslag til løsning på

$$\dot{u} = \Delta u \text{ på } \Omega \times [0,\infty) \qquad u = f \text{ på } \partial\Omega \times \{t = 0\} \qquad u = g \text{ på } \partial\Omega \times [0,\infty)$$

Dette er en grei test på om du skjønte de sentrale poengene i 4106, og ikke bare pugget til eksamen.