TMA4101/4106/4111/4121

4 - 8 - VARME

$\boxed{1}$ Partikkelflukstettheten er gitt ved ρv, så Ficks lov blir

$$\rho v = -D\nabla\rho$$

og antar vi at D ikke endrer seg i rom eller tid, får vi diffusjonslikningen

$$\dot{\rho} = D\Delta\rho$$

om vi setter fick inn i kontinuitetslikningen.

$\boxed{2}$ La oss tenke at temperaturen er gitt ved funksjonen $T(x,t)$, der x er de romlige koordinatene og t er tidspunktet. La Ω være et område i $\mathbb{R}^3$. Tidsendringen i varmeenergien i Ω er

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c\int_\Omega T\,dx\right) = \rho c\int_\Omega \dot{T}\;dx.$$

der massetettheten ρ og den spesifikke varmekapasiteten c er antatt konstante. Det er også antatt at T er glatt nok til at vi bare kan slenge tidsderivasjonen inn under integraltegnet. Varmen som slipper ut gjennom $\partial\Omega$ er

$$\int_{\partial\Omega} q\cdot dS$$

og om det ikke produseres varme i Ω, må vi ha

$$\rho c\int_\Omega \dot{T}(x,t)\;dx = -\int_{\partial\Omega} q\cdot dS.$$

Bruker vi divergensteoremet på varmefluksen, får vi

$$\rho c\int_\Omega \dot{T}(x,t)\;dx = -\int_\Omega \nabla\cdot q\;dx.$$

og dersom dette skal gjelde for alle områder Ω, må

$$\rho c\dot{T} + \nabla\cdot q = 0.$$

$\boxed{3}$ Da er det bare å sette

$$q = -\kappa\nabla T$$

inn i

$$\rho c\dot{T} + \nabla\cdot q = 0.$$

og anta at κ er konstant, så får vi

$$\rho c\dot{T} = \kappa\Delta T.$$

Dersom κ varierer i enten tid eller rom (begge disse forekommer, for κ kan være temperaturavhengig og mediet kan være anisotropt), får vi den mer kompliserte likningen

$$\rho c\dot{T} - \nabla\cdot(\kappa\nabla T) = 0.$$

$\boxed{4}$ La y_m og y_n være to egenfunsjoner. Her må vi først ta en delvisintegrasjon og se at

$$\int_0^\pi y_m''(x)y_n(x) - y_m(x)y_n''(x)\,dx = y_m'(x)y_n(x) - y_m(x)y_n'(x)\Big|_0^\pi.$$

Nå ser vi at det siste uttrykket er null både for dirichlet- og neumannrandkrav, og bruker vi $-y''(x) = \lambda y(x)$, får vi

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^\pi y_m(x)y_n(x)\,dx = \int_0^\pi y_m''(x)y_n(x) - y_m(x)y_n''(x)\,dx = 0.$$

Dersom $\lambda_n = \lambda_m$ blir det mer komplisert, og dette har konsekvenser for energinivåene i molekyler:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Degenerate_energy_levels`
Det kommer vi tilbake til.

$\boxed{5}$ Setter vi $u(x,t) = z(t)y(x)$ inn i varmelikningen, får vi

$$\dot{z}y = \alpha z\Delta y$$

og deler vi på αzy, får vi

$$\frac{\dot{z}}{\alpha z} = \frac{\Delta y}{y}$$

som må være konstant siden den ene siden kun avhenger av x og den andre kun av t. Kaller vi konstanten $-\lambda$ (dette er mest praktisk), får vi

$$\dot{z} + \lambda z = 0 \qquad \text{og} \qquad y + \lambda\Delta y = 0.$$

$\boxed{6}$ Trippelintegrerer vi

$$u\Delta v - v\Delta u\,dx = \nabla\cdot(u\nabla v - v\nabla u)$$

får vi

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u\,dx = \int_\Omega \nabla\cdot(u\nabla v - v\nabla u)\cdot dS$$

og bruker vi divergensteoremet på høyresiden, får vi

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega}(u\nabla v - v\nabla u)\cdot dS.$$

$\boxed{7}$ Dette er samme resonnement som i oppgave 4, la $u = y_m$ og $v = y_n$.

$\boxed{8}$ Vi har masse løsninger på formen

$$u_n = e^{-\alpha\lambda_n t}y_n(x).$$

Dersom det nå er mulig å dekomponere g i egenfunksjonene y_n, kan vi gjøre som i 4106 og skrive

$$u(x,t) = \sum_n u_n(x,t) = \sum_n c_n e^{-\alpha\lambda_n t}y_n(x)$$

der c_n er fourierkoeffisientene til g:

$$c_n = \frac{(g, y_n)}{y_n, y_n} \tag{1}$$

Den eneste jobben som gjenstår er å finne alle egnevektorene og egenverdien til laplaceoperatoren for området Ω. Dette går i noen kjente tilfeller. Et av de mest kjente eksemplene finner du i hydrogenatomet:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics`