4 - 7 - SYMMETRI

Det finnes syv frisemønstre,[1] sytten tapetmønstre [2] og trettito krystallstrukturer.[3] Det matematiske objektet for å studere symmetri kalles gruppeteori.[4] En **gruppe** G er en samling elementer og en binær operasjon for å kombinere dem; Den binære operasjonen $\cdot$ skal være assosiativ, G skal være lukket under operasjonen, og G må inneholde

1 et identitetselement e slik at $g \cdot e = e \cdot g = g$ for alle $g \in G$.

2 et inverselement for alle $g \in G$, altså et element g^{-1} slik $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

En gruppe kan ha et endelig eller uendelig antall elementer. Tolvtonesystemet vi bruker i moderne musikk er basert på en endelig gruppe som heter $\mathbb{Z}_{12}$. Den består av elementene

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

og den binære operasjonen er

$$a + b \text{ mod } 12$$

som betyr "legg sammen a og b og trekk fra tolv gjentatte ganger til du får noe mellom 0 og 11". Denne kjenner dere alle, for det er den samme gruppen du bruker om du kan klokken. Hvis klokken er ti og du lurer på hva klokken er om femten timer, er svaret ett, for du tar ti pluss femten som blir tjuefem og så trekker du fra tolv to ganger.

$\boxed{1}$ Vis at dette er en gruppe.

Hvis du spiller et instrument, skjønner du kanskje at du kan identifisere tallene $0 - 11$ med intervallene, så en prim er null og en kvint er syv og så videre. Oktaven trenger du ikke ta med, for det er matematisk sett det samme som en prim. (Fysisk sett er oktaven en dobling av frekvens og ikke det samme som en prim, så her må vi tenke litt abstrakt og matematisk.)

$\boxed{2}$ Finn et sett med matriser som oppfører seg på samme måte under matrisemultiplikasjon.

[1]`https://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group`
[2]`https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group`
[3]`https://en.wikipedia.org/wiki/Crystal_system`
[4]`https://en.wikipedia.org/wiki/Group_(mathematics)`

Den enkleste måten å tenke på grupper på, er gjennom matrisemultiplikasjon, og dette er antagelig det eneste en typisk ingeniør trenger. Et av flere korrekte svar på forrige oppgave er

$$\{R, R^2, \cdots, R^{12}\}$$

der

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix}.$$

Ganger du rotasjonsmatrisen med seg selv mange ganger, vil du bare få tolv forskjellige matriser dersom rotasjonsvinkelenvinkelen er $\pi/6$, og dette er matematisk sett identisk med klokkeslettene og tolvtonesystemet. Dette skulle Arnold Schönberg visst. Kanskje han kunne fått utløp for egoet sitt på andre måter enn å skrive musikk som ingen orker å høre på, og så kunne han skrevet mere Pelleas og Melisande istedet.

$\boxed{3}$ Hvis jeg sier at denne gruppen er rotasjonssymmetriene til et regulært polygon med tolv kanter, hva er da den korresponderende gruppen til et regulært polygon med seks kanter?

Så langt har vi egentlig kun studert en gruppe, $\mathbb{Z}^{12}$, men det var lett å diske opp med fire forskjellige tolkninger eller bruksområder. Alle disse bruksområdene oppfører seg helt likt, og gruppen $\mathbb{Z}^{12}$ er den matematiske fellesnevneren. La oss nå se på noen grupper med tolv elementer som oppfører seg litt annerledes.

$\boxed{4}$ Om jeg sier at det sekskantede polygonet i oppgaven over kan speiles i tillegg til å roteres, hvordan ser gruppen ut da?
(Hint: Tenk at hjørnene er nummererte og at du skal finne et sett med matriser som flytter rundt på dem på alle mulige måter på en slik måte at polygonet hadde sett likt ut om hjørnene var unummerte.)

Fikk du til oppgaven over, vil du forhåpentligvis forstå at det er noen fundamentale forskjeller på denne gruppen og $\mathbb{Z}^{12}$. Når vi først er inne på det, kan vi ta med to andre klassikere.

$\boxed{5}$ Hva med alle symmetriene til et regulært tetraeder?

$\boxed{6}$ Hva med alle permutasjoner på $(1, 2, 3, 4)$?
(En permutasjon er for eksempel $(1, 4, 3, 2)$. Hvor mange finnes det?)

På forrige side sa jeg at tolvtonesystemet, klokken, og alle rotasjonssymmetrier av det tolvkantede polygonet var den samme gruppen. På fagspråket sier vi at de er **isomorfe**. Dette betyr at gruppene har den samme multiplikasjonstabellen: [5]

	PRIM	LITEN SEKUND	STOR SEKUND	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM
PRIM	PRIM	LITEN SEKUND	STOR SEKUND	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM
LITEN SEKUND	LITEN SEKUND	STOR SEKUND	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM
STOR SEKUND	STOR SEKUND	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND
LITEN TERS	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND
STOR TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND	
KVART	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND		DESIM = TERS
FORSTØRRET KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND		DESIM = TERS	
KVINT	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND		DESIM = TERS		
LITEN SEKST	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND		DESIM = TERS			
STOR SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND		DESIM = TERS		O	S	V
LITEN SEPTIM	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND		DESIM = TERS					
STOR SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV = PRIM	LITEN SEKUND	NONE = SEKUND		DESIM = TERS						

	$R^0=I$	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^{10}	R^{11}
$R^0=I$	$R^0=I$	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^{10}	R^{11}
R	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^{10}	R^{11}	$R^{12}=I$
R^2	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^{10}	R^{11}	$R^{12}=I$	$R^{13}=R$
R^3	R^3	R^4										
R^4	R^4	R^5										
R^5	R^5	R^6										
R^6	R^6	R^7				O	S		V			
R^7	R^7	R^8										
R^8	R^8	R^9										
R^9	R^9	R^{10}										
R^{10}	R^{10}	R^{11}										
R^{11}	R^{11}											

[5] Å legge tre timer til et klokkeslett er strengt tatt en addisjon, men siden vi bruker · for den generiske binære operasjonen i gruppeteori, blir det fort til at man sier "multiplikasjonstabell allikevel".

Du trenger ikke vite hva en oktav eller en sekund er i musikkteori for å forstå poenget. Dersom du klarer å se forbi merkelappene i tabellen over og oppdage at det er den samme strukturen, er du i boks. Jeg har bevisst brukt intervallene i tolvtonesystemet nettopp for å drive gjennom at det er strukturen på multiplikasjonstabellen og ikke merkelappene som er viktig. Herfra og ut skal vi representere elmentene i en gruppe ved matriser - da er det lurt å først utvide vår kunnskap om rotasjonsmatriser litt.

$\boxed{7}$ Kryssproduktet mellom to vektorer x og y kan skrives som et matrise-vektorprodukt

$$y \times x = Sx.$$

Hva blir S?
(Sorry Melina, her er det enda en ny og forferdelig måte å beregne kryssproduktet på.)

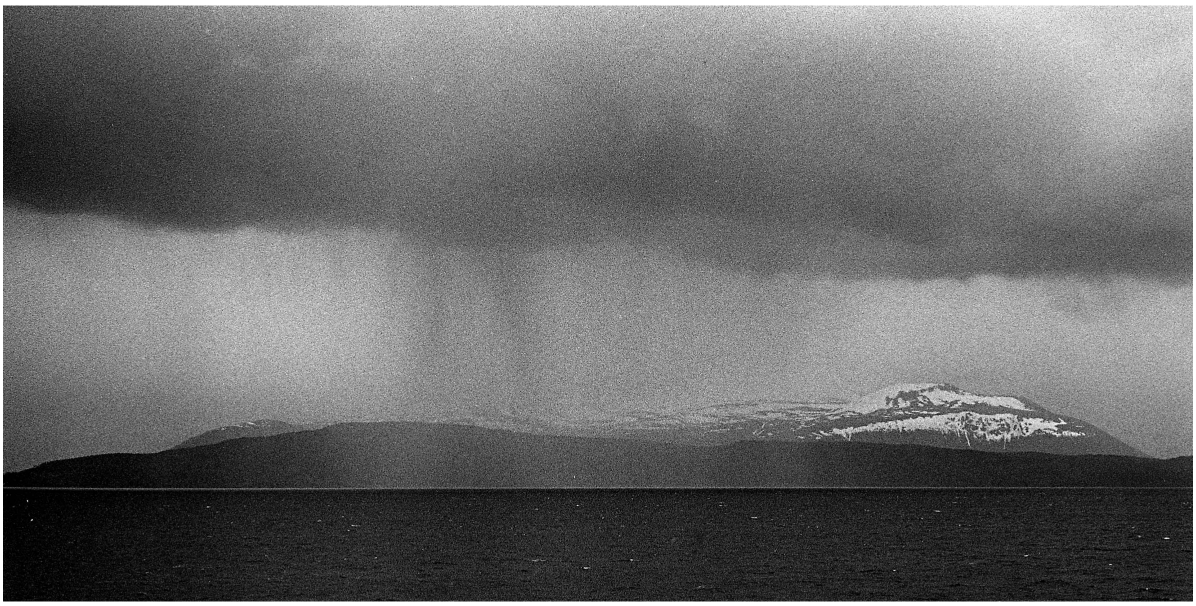
Vi skriver $S(y)$ for å indikere at det er y vi putter inn på rett måte i S. Rodrigues formel, som vi hadde i TMA4106, kan nå omformuleres - vi kan skrive operasjonen som en rotasjonsmatrise slik:

$$R = I + S(y)\sin\theta + S^2(y)((1 - \cos\theta))$$

$\boxed{8}$ Legg et regulært tetraeder slik at det har hjørner i $(1,1,1)^T$, $(-1,-1,1)^T$, $(1,-1,-1)^T$ og $(-1,1,-1)^T$ og skriv opp et sett med matriser som er isomorft til symmetrigruppen.
(Finn et sett med matriser som flytter på tetraederet slik at det ser likt ut men at hjørnene bytter plass med hverandre. Du trenger både rotasjoner og refleksjoner.)

Når det er sagt, skal vi bruke matriseregning resten av økten. For å komme frem til det som er interessant, må vi skjønne hva en **generator** er. Dette er et sett med elementer i gruppen som gir deg alle elementene i gruppen dersom du ganger dem sammen gjentatte ganger. Tolvtonesystemet og rotasjonssymmetriene til den tolvkantede platen er såkalt **sykliske** - du trenger bare én generator. For tetraederet trenger du fler.

$\boxed{9}$ Finn generatorerer for rotasjonsymmetriene til den tolvkantede platen og symmetrigruppen til tetraederet. Og tolvtonesystemet om du liker musikk for den saks skyld, men har du funnet generator for symmetriene til den tolvkantede platen, har du for tolvtonesystemet også.



I fluiduken påsto jeg at dersom du splitter jacobimatrisen til hastighetsfeltet i symmetrisk og skjevsymmetrisk del slik:

$$\nabla f = \frac{1}{2}\left(\nabla f + \nabla f^T\right) + \frac{1}{2}\left(\nabla f - \nabla f^T\right)$$

gir den skjevsymmetriske delen hastighetsfeltets infinitesimale rotasjon. La oss se om vi kan forstå dette. Symmetriene til en krystall faller i en av trettito varianter,[6] alle endelige grupper. Men symmetrien til en sirkel er noe helt annet - her er symmetrigruppen kontinuerlig. Dette kalles en **liegruppe**, etter den norske matematikeren Sophus Lie.[7] Liegrupper pleide å være et abstrakt leketøy kun tilgjengelig for de argeste, men er nå et standardverktøy innen reguleringsteknikk og kvantefysikk.

$\boxed{10}$ I tråd med vår filosofi om å tenke matriser, kan du tenke på enhetssirkelgruppen som mengden av alle rotasjoner:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Vis at dette er en gruppe under matrisemultiplikasjon.

Den tilsvarende gruppen i $\mathbb{R}^3$ heter SO(3) eller den **spesielle ortogonale gruppen**. Rodrigues' formel gir et generisk uttrykk for et element i denne gruppen, og i TMA4106 skrev vi opp at rotasjonsmatriser var mengden av alle 3×3-matriser som tilfredsstiller

$$R^T R = I \qquad \det R = 1.$$

Spørsmålet er nå om vi kan klare å finne en generator for denne gruppen. Det kan vi, men de må settes opp ved en grenseverdiprosess siden SO(3) er en kontinuerlig gruppe. Først må vi skjønne et triks.

$\boxed{11}$ Hvis jeg sier at n et heltall, og A en eller annen matrise, hva blir da

$$\lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{1}{n}A\right)^n?$$

Rot i hukommelsen og foreslå en formel.

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Point_groups_in_three_dimensions`

[7] Her er huskeregelen:
Sophus Lie
døde i
en alder av nesten femtini.
Han ble satt fri
av leukemi.
C'est la vie.

Helt riktig:

$$e^A = \lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{1}{n}A\right)^n$$

Høyresiden her er slik man tenker på en generator for en liegruppe - man kjører et uendelig lite inkrement undelig mange ganger. Her kommer neste triks. Dersom $S(y)$ er skjevsymmetrisk, er

$$e^{S(\theta y)} = \lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{\theta}{n}S(y)\right)^n$$

$\boxed{12}$ Sjekk at $e^{S(\theta y)}$ roterer vektorer vinkelen θ om y. Det enkleste gitt din bakgrunnskunnskap er antagelig å sjekke at (husk at $|y| = 1$)

$$e^{S(\theta y)} = I + S(y)\sin\theta + S^2(y)((1-\cos\theta)).$$

Hvis du nå har skjønt hva en generator er og tror på at $e^{S(\theta y)}$ roterer vektorer vinkelen θ om y, er det ikke et stort steg i hugen å forstå at den skjevsymmetriske delen av jacobimatrisen til hastighetsfeltet gir deg den infinitesimale rotasjonen, for en rotasjon er sammensatt av uendelig mange bittesmå lineærtransformasjoner på formen

$$I + \frac{\theta}{n}S(y).$$

Derfor sier folk gjerne slike ting som at "rotasjoner er generert av skjevsymmetriske matriser" når de skal vise at de er en del av det laget i befolkningen som har peiling på på liegruppeteori. Et mer folkelig utsagn er at jo større n, jo mer oppfører uttrykket seg som en rotasjon med vinkel θ/n.

$\boxed{13}$ Finn generatormatriser for rotasjon rundt de kartesiske koordinataksene. Disse rotasjonene kalles roll, pitch og yaw (e_1 er fartøyets fartsretning og e_3 er opp):

$$e^{\theta S(e_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad e^{\theta S(e_2)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad e^{\theta S(e_3)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$