TMA4101/4106/4111/4121

4 - 7 - SYMMETRI - LF

1 Den binære operasjonen er å legge sammen klokkeslett, og denne er åpenbart assosiativ - det spiller ingen rolle om du først legger til tre og så fem timer eller om du først legger til fem og så tre. Mengden er lukket, du får ikke for eksempel $9801/2\sqrt{2}\pi$ eller $i+j+3k$ ved å legge til eller trekke fra hele timer. Identitetselementet er 0 og inverselementet til a er $12-a$. Så dette er en gruppe.

3 For eksempel matrisene $\{R, R^2, \cdots, R^6\}$ der

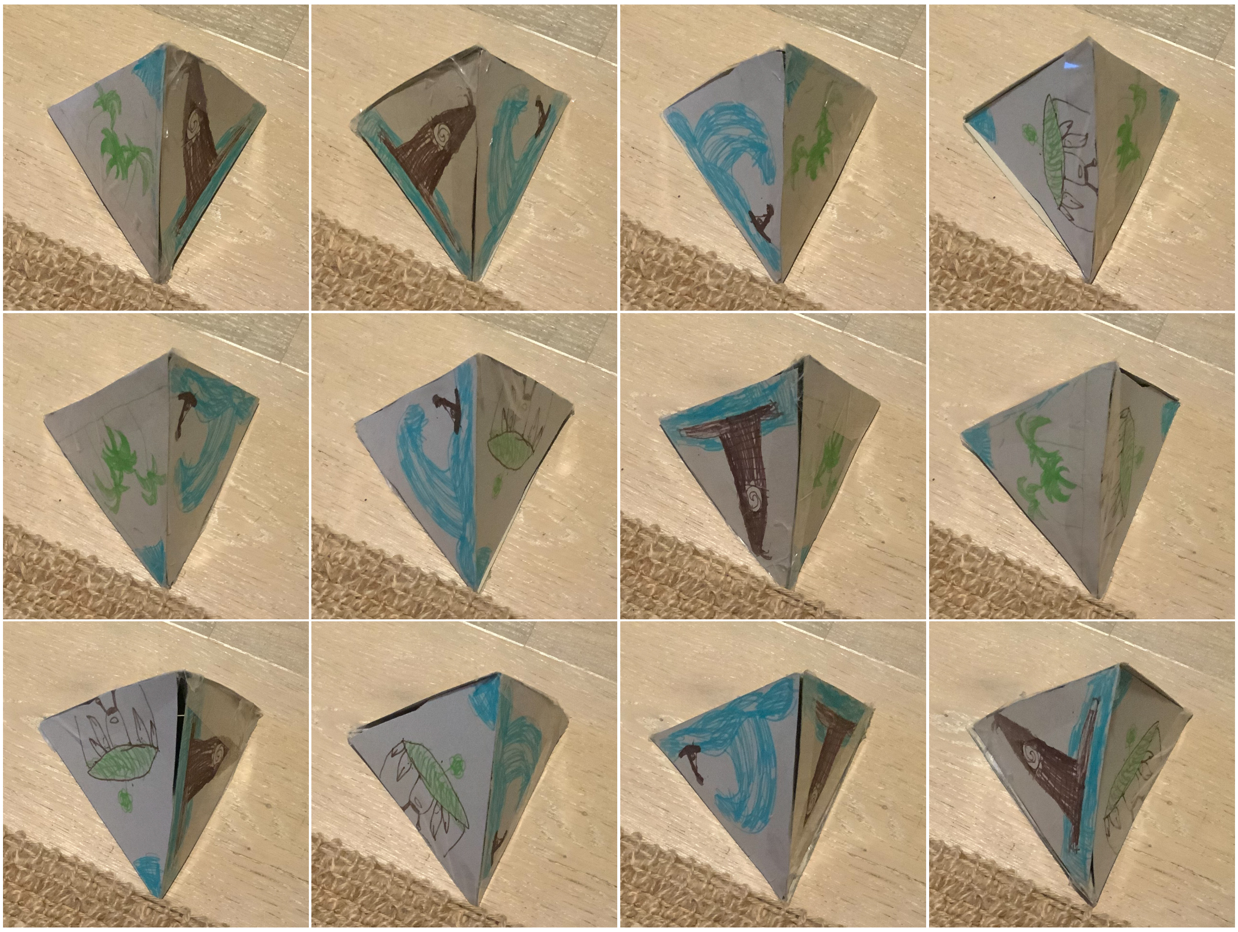
$$R = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}.$$

4 Her er det bare å slenge på en matrise til, for eksempel speiling om x_1-aksen:

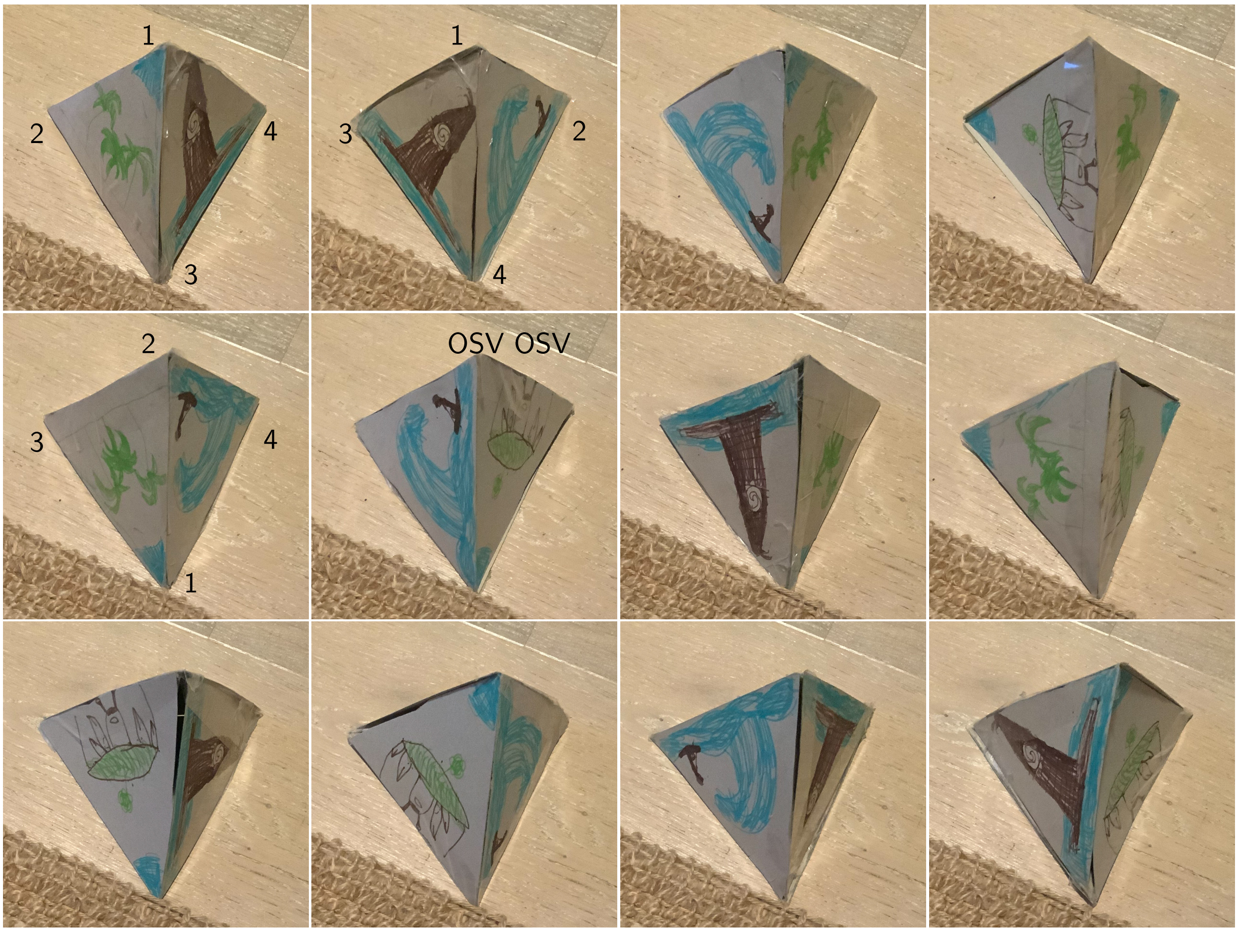
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hvis du prøver å gange alle matrisene i forrige oppgave med hverandre og med denne, vil du nå se at du får bare tolv forskjellige varianter.

5 HEI HER ER ALE SYMETRIENE HILSEN HANNA

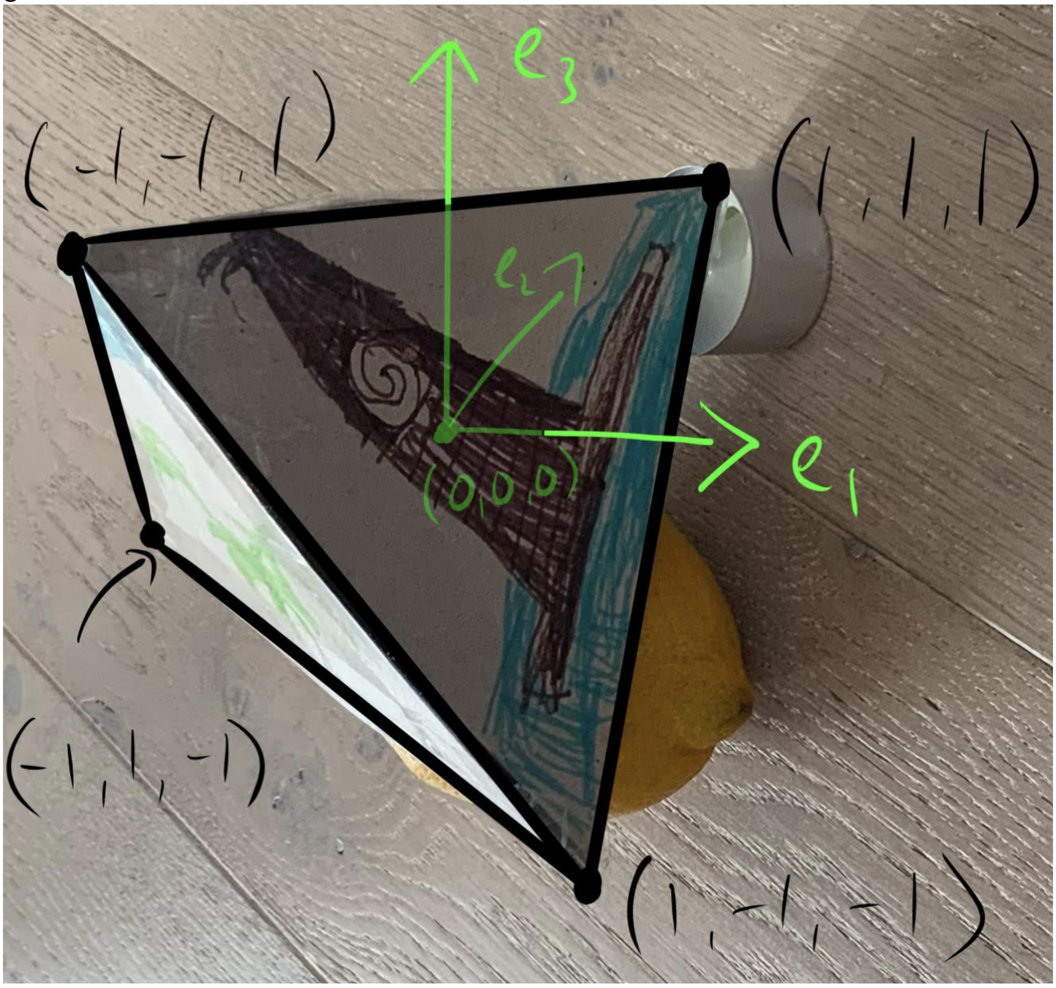


6 Permutasjoner er en klassiker i gruppeteori. Det kan være litt komplisert å tenke på i begynnelsen, for man er ikke vant med operasjonen permuter elementer”, men én ting er lett å se - gruppen på ha 24 elementer siden $4! = 24$. Dette de samme symmetriene som tetraederet dersom du hadde fått lov til å flytte merkelappene på hjørnene ved å ta dem av og på, og dobbelt så mange som om du kun får rotere:



7 $S = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{8}$ Det er ikke helt trivielt å tegne dette på en forståelig måte, så antagelig må du lage deg et tetraeder selv og rotere rundt på det. Skjær ut fire likesidete trekanter og teip dem sammen, så kan du vri og vende på det og kose deg med dette hele helgen. Det gjorde jeg og det var helt nødvendig for å finne ut av dette med den patetiske sveklinghjernen min. Hele lørdagen gikk med.



Hvis du vrir og vender en stund på tetraederet vil du nok innse at dersom du tar en hundre og åtti graders rotasjon om e_3 og en hundre og tjue graders rotasjon om $e_1 + e_2 + e_3$ og så kombinerer disse på forskjellige måter, vil du klare å frembringe alle tolv konfigurasjoner av tetraederet. Den første er lett, det blir bare

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den andre er litt mer jobb, men heldigvis har vi rodrigues. Rotasjonsaksen er $y = (e_1 + e_2 + e_3)/\sqrt{3}$, slik at

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad S^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

og

$$
\begin{aligned}
R_2 =& I + \frac{\sqrt{3}}{2} S + \frac{3}{2} S^2 \\
=& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Merk først at $R_1^2 = R_2^3 = I$, så det er ikke vits i kjøre R_1 to ganger rett etter hverandre, og det er ikke vits i å kjøre R_2 tre ganger rett etter hverandre. Hvis du nå begynner å gange R_1 og R_2 to sammen gjentatte ganger (vær systematisk!), vil du se at i tillegg det kun er mulig å oppdrive tolv forskjellige matriser:

$$
I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad R_2^2 R_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
R_1 R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad R_2 R_1 R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_2^2 R_1 R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
R_1 R_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_2 R_1 R_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad R_2^2 R_1 R_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$\boxed{9}$ Generatorer for den tolvkanta platen er

$$
R = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix}
$$

men R^k er også en generator dersom k ikke er en faktor i tolv. Dette korresponderer til at noen intervaller tar deg gjennom hele kvintsirkelen, nemlig halvtonetrinnet ($k = 1$), kvarten ($k = 5$), kvinten ($k = 7$) og den store septimen ($k = 11$), mens andre bare tar deg gjennom en delmengde av kvintsirkelen. Det finnes to heltoneskalaer, tre dimakkorder, fire augakkorder og seks satanakkorder.

For tetraederet må man ha to generatorer. I forrige oppgave så vi at vi fikk til alt med R_1 og R_2, men det går fint å bruke to andre rotasjoner istedet, for eksemepel R_2^2 og $R_1 R_2$. Du kan ikke bruke R_2 og R_2^2, for disse genererer bare en delmengde av symmetriene, slik som noen intervaller bare tar deg gjennom deler av kvintsirkelen.

$\boxed{10}$ Enkelt. Produktet av to rotasjonsmatriser er en ny rotasjonsmatrise, så mengden er lukket. Identiteten er med (velg $\theta = 1$) og hvert element har en invers (bytt fortegn på θ så roterer du tilbake til der du kom fra).

$\boxed{12}$ Det første vi må gjøre er å se litt på

$$S(y) = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La oss beregne

$$S^2 = \begin{pmatrix} -(y_2^2 + y_3^2) & y_1 y_2 & y_1 y_3 \\ y_1 y_2 & -(y_1^2 + y_3^2) & y_2 y_3 \\ y_1 y_3 & y_2 y_3 & -(y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix}$$

og (husk at $|y| = 1$)

$$S^3 = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix} = -S$$

og

$$S^4 = \begin{pmatrix} (y_2^2 + y_3^2) & -y_1 y_2 & -y_1 y_3 \\ -y_1 y_2 & (y_1^2 + y_3^2) & -y_2 y_3 \\ -y_1 y_3 & -y_2 y_3 & (y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix} = -S^2$$

og

$$S^5 = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix} = S$$

Nei sku du ha sett. Disse matrisene danner en syklisk gruppe med fire elementer så lenge $|y| = 1$, isomorf til en annen gruppe du kjenner godt, nemlig alle potenser av den imaginære enheten i. Resten er barnemat. Vi beregner:

$$\begin{aligned} e^{\theta S} &= I + \theta S + \frac{\theta^2 S^2}{2} \\ &\quad + \frac{\theta^3 S^3}{3!} + \frac{\theta^4 S^4}{4!} \\ &\quad + \frac{\theta^5 S^5}{5!} + \frac{\theta^6 S^6}{6!} + \cdots \\ &= I + \theta S + \frac{\theta^2 S^2}{2} \\ &\quad - S\frac{\theta^3}{3!} - S^2\frac{\theta^4}{4!} \\ &\quad + S\frac{\theta^5}{5!} + S^2\frac{\theta^6}{6!} + \cdots \\ &\quad = I + S\sin\theta + S^2(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$