4 - 6 - HARMONISKE FUNKSJONER II

Coloumb oppdaget at det elektriske feltet fra en statisk punktladning q plassert i origo er

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{|x|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

mens Maxwells lover for elektrostatikk sier at

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad\qquad \nabla \times E = 0.$$

Alt dette er oppdaget eksperimentelt og kan så vidt vi vet ikke utledes fra mer grunnleggende prinsipper. Men om du starter elektrostatikken med Maxwell eller Coloumb er irrelevant for en fysiker. Nå skal vi se på hvorfor.

$\boxed{1}$ Det første man gjør med harmoniske funksjoner er å finne alle harmoniske funksjoner på $\mathbb{R}^3$ som kun avhenger av kulekoordinatradien r. Dette kan du gjøre ved å løse

$$\Delta u = 0$$

i kulekoordinater og anta

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0.$$

Gjorde du det riktig, fant du noe som kalles **fundamentalløsningen** til Laplaces likning. Du kjenner denne godt fra før. Kulekoordinatene er jo litt annerledes i og med at om du setter $r = 0$ kan θ og φ være hva som helst. Dette gir av og til utslag i rare subtiliteter når vi bruker dem.

$\boxed{2}$ Forklar at det du egentlig fant i forrige oppgave, var løsningen til

$$-\Delta u = \delta$$

der δ er diracpulsen, og foreslå en formel for løsningen til Poissons likning

$$\Delta u = -f.$$

Fundamentalløsningen vi fant på forrige side er den eneste harmoniske funksjonen på hele $\mathbb{R}^3$ som kun avhenger av r. Men det finnes mange andre harmoniske funksjoner på $\mathbb{R}^3$, for eksempel

$$u(x) = x_1^2 - x_2^2$$

eller

$$v(x) = x_1 x_2$$

så likningen $\Delta u = 0$ i seg selv har ikke entydig løsning på $\mathbb{R}^3$. Men strekker du et trommeskinn over en ramme er det klart at det finnes bare én fysisk løsning, og spesifiserer du temperaturen på kanten av et område og lar tiden gå til varmeflyten er stasjonær, er det én temperaturfordeling som er korrekt. Dette er eksempler på noe som kalle **dirichletproblemer**, og de ser ut som følger. La Ω være et område i $\mathbb{R}^n$, og la $\partial\Omega$ være randen. Trommeskinnet eller varmeflyten er en funksjon u som tilfredsstiller

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{på } \Omega \\ u &= g \quad \text{på } \partial\Omega \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Nå kan vi vise entydighet.
(Hint: Anta det finnes to løsninger. Hva slags randverdiproblem løser differansen?)

For en harmonisk funksjon er er fluksen til gradientfeltet ut av et vilkårlig område alltid null.

$\boxed{4}$ Vis dette.

Det er også sånn at av alle funksjoner som tilfredsstiller $u = g$ på $\partial\Omega$, er det den harmoniske funksjonen som minimerer dirichletenergien

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx. \tag{1}$$

Dette kalles **Dirichlets prinsipp**.

$\boxed{5}$ Vis dette.

Egenskapene under kalles “middelverdisatsene for harmoniske funksjoner”.

$\boxed{6}$ Vis at for harmoniske funksjoner gjelder at

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial\Omega} u \, dS$$

der $x \in \mathbb{R}^3$ og Ω er en kule sentrert i x og med vilkårlig radius r.

$\boxed{7}$ Bruk oppgaven over til å vise at også

$$u(x) = \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_{\Omega} u \, dx$$

der $x \in \mathbb{R}^3$ og Ω er en kule sentrert i x og med vilkårlig radius r.

Tilsvarende resultater gjelder i $\mathbb{R}^2$, men bevisene er penest i $\mathbb{R}^3$. Av middelverdisatsene følger maksverdisatsen, som sier at en funksjon som er harmonisk på Ω alltid tar maksimums- og minimumsverdier på $\partial\Omega$.

$\boxed{8}$ Utled dette.
(Dette kan være greit å vite om, i tilfelle du noensinne skulle få den ikke spesielt geniale ide å spikre opp noen ladde gjenstander på rommet ditt og så forvente et lokalt spenningsmaksimum et eller annet sted i midt rommet.)

Laplaceoperatoren er ellers rotasjonsinvariant. Dette betyr at om du roterer koordinatsystemet ditt, vil de rene andrederiverte i det nye koordinatsystemet summere til det samme som i det gamle. Dette kan vi vise ved en totrinnsprosess.

$\boxed{9}$ Vis at laplaceoperatoren er rotasjonsinvariant.