4 - 5 - FLUIDMEKANIKK

Målet med fluidmekanikk er å finne likninger som kan løses for å finne trykk, tetthet, temperatur og væskehastighet. Partikler flytter seg på forskjellige måter. Hvis det finnes en eller annen form for drivende kraft, for eksempel fra en trykkgradient eller fra tyngdekraften, kalles det **konveksjon**, og hvis bevegelsen er tilfeldig, kalles det **diffusjon**. I dette kapitlet skal vi studere de mest kjente konveksjonslikningene.

$\boxed{1}$ Så la oss begynne med en likning som er identisk med kontinuitetslikningen i elektromagnetisme. Akkurat som ladning, kan masse ikke oppstå eller forsvinne, ihvertfall så lenge det ikke er fisjon eller fusjon involvert. Vis at

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

der ρ er væskens massetetthet og v væskehastigheten. Hvordan ser kontinuitetslikningen ut dersom væsken er inkompressibel?

De resterende likningene vi skal utlede er alle tuftet på Newtons andre lov. Det vi må lære oss er hvordan vi håndterer krefter og akselerasjon når vi driver med væskeflyt. Da må vi først ta unna noe som kalles **totalderivert**.

$\boxed{2}$ Tenk at du flyr rundt i et fly eller et helikopter og at $f(x,t)$ er temperaturen og $x(t)$ din trajektorie. Finn et uttrykk for din opplevde temperaturforandring

$$\frac{d}{dt} f(x(t), t).$$

(Dette er som oppgave 14 i økt 3-1, bare at du får et ekstra ledd siden f avhenger av tiden.)

Når i utleda bølgelikningen for vibrerende streng eller trommeskinn brukte vi Newtons andre lov, men ikke med de dimensjonene du er vant til fra skolen. Bølgelikningen

$$\rho\ddot{u}(x,t) = Tu''(x,t)$$

for en vibrerende streng er et regnskap i kraft per lengde, mens den for trommeskinn

$$\rho\ddot{u}(x,t) = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

er et regnskap i kraft per areal. For væsker setter vi opp regnskapet i kraft per volum, så venstresiden i Newtons andre lov er tetthet ganger akselerasjon og ikke masse ganger akselerasjon. Kraft per volum kalles **krafttetthet**.

$\boxed{3}$ Utled at venstresiden må være gitt ved

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v\right).$$

I fluidmekanikk er det flere typer krefter å ta hensyn til. La Ω være et lite volum. Vi skiller mellom **kontaktkrefter**, som virker via $\partial\Omega$ og **volumkrefter**, [1] som virker fra avstand. Væsketrykk og friksjon gir opphav til kontaktkrefter, mens gravitasjon eller elektromagnetisme gir volumkrefter. Kontaktkreftene må flateintegreres over $\partial\Omega$, mens volumkreftene må trippelintegreres over Ω.

$\boxed{4}$ La oss varme opp ved å anta kun gravitasjon og trykkgradient og at væsken er i ro. Sett opp et lite kontrollvolum og utled at

$$\nabla p + \rho g e_3 = 0$$

der p er trykket og g er tyngdeakselerasjonen.

[1]Det finnes ikke noe godt norsk ord i vanlig bruk; de fleste sier bare "body force". Ellingsen borte på energi- og prosessteknikk foreslår "kroppspress".

Slenger du på akselerasjonen i resonnementet i oppgave 4, får du

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{\nabla p}{\rho} - g e_3.$$

I et typisk kurs i fluidmekanikk, ville man nå gått i gang med å utlede mange konsekvenser av disse likningene. Dette kalles "studiet av tørt vann" og det er få situasjoner der disse likningene spår korrekt oppførsel. En av de tingene som gjør fluidmekanikk komplisert, er at fluidmekanikk må ha med friksjon for å bli interessant. Derfor skal vi gå rett på fluidmekanikk med friksjon. For å forstå friksjon, må vi først forstå **spenning** og **deformasjon**.

La oss begynne med spenning. Det hydrostatiske trykket p er en skalar med benevning kraft per areal. En bitte liten plate nedsenket i et kar med vann vil utsettes for den samme kraften fra vanntrykket uansett hvordan platen er orientert, og kraften virker alltid normalt på platen. [2] Dette er ikke tilfellet dersom du erstatter vannet med en tyktflytende væske i bevegelse eller et fast stoff som er satt i press. Da vil kraften på den bittelille platen for det første kunne peke i andre retninger enn normalt på platen, og for det andre variere med platens orientering i rommet. **Spenning**[3] er en generalisering av trykk. Du måler kraft per areal på platen når den er orientert normalt på de kartesiske aksene, og setter opp alt i **spenningstensoren**:[4]

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Dette er en generalisering av trykk. Det vanligste er å sette opp spenningen på hver orientering av flaten som en rad i matrisen, men jeg tror vi skal sette dem opp som kolonner, siden dette er mer i tråd med hva vi er vant til. Spenningskomponentene som virker tangentielt på en flate kalles **skjærspenninger**, og disse gir opphav til **skjærkrefter**.

$\boxed{5}$ Hva er spenningen på en liten plate med normalvektor e_n?

Så må vi ha et krasjkurs i hvordan spenningstensoren brukes. Newton skrev opp lovene sine for punktpartikler. Femti år etter generaliserte Euler dem for legemer. Eulers lover ser like ut som Newton sine, men de holder styr på koordinatene inni legemet istedet for på punktpartikler. Forskjellen er at volumkraften på legemet finnes ved å trippelintegrere volumkrafttettheten over legemet, mens kontaktkraften finnes ved å fluksintegrere spenningen over legemets overflate.

$\boxed{6}$ Måten vi opererer på er å sette opp regnskap over krafttettheter og ikke krefter. Bruk divergensteoremet til å vise at bidraget fra kontaktkreftene er gitt ved divergensen til radene i spenningstensoren.

[2] Et lite volum vil oppleve bittelitt større trykk under enn over dersom du kombinerer trykk med gravitasjon, og derfor får man oppdrift.

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics)

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_stress_tensor

Det neste vi må tar er deformasjon. La oss gå helt tilbake til første studieår, da vi lærte om odde og jevne funksjoner. Alle funksjoner på intervallet $[-L, L]$ kan skrives som en sum av en odde og en jevn funksjon, og dette er lett å se ved å definere

$$f_j(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad \text{og} \qquad f_o(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Det samme trikset funker på matriser slik:

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

Den første av disse er symmetrisk og den andre er skjevsymmetrisk, og hvis du gjør dette med jacobimatrisen til hastighetsfeltet v, vil den symmetriske delen gi deg deformasjonen og den antisymmetriske rotasjonen.[5] I en tyktflytende væske i bevegelse er det **viskositeten**[6] som sørger for at kontaktkreftene generelt ikke står normalt på bitte små plater som nedsenkes i væsken, så vi må ha en kvantitativ beskrivelse av spenningenstensorens forhold til skjærkrefter. Dersom du har to parallelle plater med areal A og avstand d, adskilt av et tynt lag viskøs væske og som kan beveges relativt til hverandre, er det et eksperimentelt faktum at

$$\frac{F}{A} = \nu \frac{v}{d}$$

der F er netto kraft på platene, v er den relative farten mellom platene og ν en den viskøse friksjonskoeffisienten. Newton tok derfor et skritt videre og postulerte relasjonen

$$\sigma = \nu\left(\nabla v + \nabla v^T\right)$$

mellom spenning og deformasjon. Her er det ikke tatt høyde for friksjonen ved ekspansjon, så om du i tillegg har kompressibilitet, er modellen

$$\sigma = \nu_1\left(\nabla v + \nabla v^T\right) + \nu_2 I \nabla \cdot v$$

der I er identitetsmatrisen og ν_2 er en ekstra friksjonskoeffisient.

$\boxed{6}$ Nå skal du i prinsippet ha alt som trengs for å utlede de berømte **Navier-Stokes-likningene**:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{\nabla p}{\rho} - g + \frac{1}{\rho}\left(\nu_1 \Delta v + (\nu_1 + \nu_2)\nabla(\nabla \cdot v)\right)$$

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Strain-rate_tensor
[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Viscosity