4 - 5 - FLUIDMEKANIKK - LF

1 La Ω være et område i $\mathbb{R}^3$. Den totale massen inne på Ω er

$$\int_\Omega \rho \, dx$$

Denne er gitt i kilo, og endringen

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \, dx$$

er følgelig gitt i kilo per sekund. Dersom v er gitt i meter per sekund, er ρv gitt i kilo per sekund per kvadratmeter, så da er

$$\int_{\partial\Omega} \rho v \cdot dS$$

den totale utstrømningen av masse gjennom $\partial\Omega$ i kilo per sekund. Hvis vi antar at masse ikke skapes eller ødelegges inne på Ω, må vi ha

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \, dx + \int_{\partial\Omega} \rho v \cdot dS = 0$$

siden negativ utstrømning leder til økning av masse inne på Ω. Dette er kontinuitetslikningen på integralform, og bruker vi divergensteoremet og antar tidsderivasjonen får lov til å gå inn under trippelintegralet, får vi

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\rho \, dx \int_\Omega \nabla \cdot (\rho v) \, dx = 0$$

og dersom Ω er tilfeldig valgt, må disse integrandene være like, slik at

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

Dersom væsken er inkompressibel, er ρ en konstant, slik at

$$\nabla \cdot v = 0.$$

Dette er den samme likningen som Gauss' lov for magnetisme, og det finnes idealiserte situasjoner der væskeflytmodellene gir opphav til de samme feltene som i magnetostatikk.

2 Her får vi to forskjellige endringer i tid,

$$\frac{d}{dt}f(x(t),t) = \dot{f}(x,t) + \nabla f(x,t)\dot{x}(t).$$

Merk at dette går fint både om f er skalar- og vektorfelt så lenge du er nøye på matrisedimensjonene. Størrelsen kalles totalderivert fordi den tolkes som en partikkel eller et lite flyttbart volumelements opplevde endring av f med hensyn på tid. Det første leddet er der fordi f endres over tid, mens det andre leddet er der fordi partikkelen flytter seg rundt i vektorfeltet:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Material_derivative`

$\boxed{3}$ Dersom vi setter $f = v$ i forrige oppgave og antar at $v = \dot{x}$, får vi at akselerasjonen til partikkelen eller det infinitesimale flyttbare volumet blir

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla v v.$$

Den siste leddet skrives som regel

$$(v \cdot \nabla)v$$

i fysikkbøker, så jeg skal bruke denne notasjonen. Siden vi skal sette opp regnskap i volumkrefter, blir høyresiden

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v\right).$$

$\boxed{4}$ La Ω være et lite kontrollvolum. Kraften fra det hydrostatiske trykket på en bit av Ω er

$$-pe_n \, dS$$

der dS er en liten bit av $\partial\Omega$ og e_n er utnormalvektoren. La oss ta det komponent for komponent. Komponenten til kraften i retning e_k på hele $\partial\Omega$ er

$$\int_{\partial\Omega} -pe_{nk} \, dS$$

og dette sammenfatter vi på vektorform slik:

$$\int_{\partial\Omega} -pe_n \, dS = \begin{pmatrix} \int_{\partial\Omega} -pe_{n1} \, dS \\ \int_{\partial\Omega} -pe_{n2} \, dS \\ \int_{\partial\Omega} -pe_{n3} \, dS \end{pmatrix}$$

Kraften fra tyngden er

$$-e_3 \int_{\Omega} \rho g \, dx = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\int_{\Omega} \rho g \, dx \, dS \end{pmatrix}.$$

Dersom vi skal sammenlikne integrandene i alle disse integralene, må vi få kontaktkreftene over på trippelintegralform, og da er det divergensteoremet som er arbeidshesten. Vi bruker gaussgreenteoremet (oppgave 7 i 4-2), og skriver

$$\int_{\partial\Omega} -pe_n \, dS = \begin{pmatrix} \int_{\partial\Omega} -pe_{n1} \, dS \\ \int_{\partial\Omega} -pe_{n2} \, dS \\ \int_{\partial\Omega} -pe_{n3} \, dS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} -\frac{\partial p}{\partial x_1} \, dS \\ \int_{\Omega} -\frac{\partial p}{\partial x_2} \, dS \\ \int_{\Omega} -\frac{\partial p}{\partial x_3} \, dS \end{pmatrix} = -\int_{\Omega} \nabla p \, dS$$

Summerer vi disse kreftene og krever at de balanserer hverandre, får vi

$$0 = -\int_{\Omega} \nabla p \, dS - e_3 \int_{\Omega} \rho g \, dx$$

og dersom Ω er vilkårlig valgt, må integrandene være like:

$$0 = \nabla p + \rho g$$

$\boxed{5}$ Spenningen på en liten plate med normalvektor e_n blir σe_n. I de fleste fluidmekanikkbøker transponerer de σ og så skriver de $n \cdot \sigma$ og har alle vektorer på radform i stedet for kolonneform, se for eksempel her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics)`
Hvis du senere er nødt til å basere alt i livet på rader i stedet for kolonner, må du også huske å skrive kjerneregelen som $g'(x)f'(g(x))$ og ikke $f'(g(x))g'(x)$ slik du er vant til. Merk at selv de som skriver på wikipedia er ikke helt enige med seg selv om notasjon - her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_stress_tensor`
og her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics)#Cauchy_tensor`
er indekseringen i σ byttet om i forhold til hverandre.

$\boxed{6}$ Dette er det samme resonnementet som i oppgave 4. La σ_k være rad k i σ, altså alle spenninger i retning e_k. Kontaktspenningen på $\partial\Omega$ er

$$\sigma e_n \, dS,$$

så netto kraft blir

$$\int_{\partial\Omega} \sigma e_n = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\partial\Omega} \sigma_1 e_n \, dS \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \sigma_2 e_n \, dS \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \sigma_3 e_n \, dS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma_1 \, dx \\ \displaystyle\int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma_2 \, dx \\ \displaystyle\int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma_3 \, dx \end{pmatrix}$$

Dersom du kun har hydrostatisk trykk p, blir spenningstensoren bare

$$\sigma = -\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

så vi kunne gjort denne oppgaven først og tatt oppgave 4 som en triviell konsekvens.

$\boxed{6}$ Vi tregner altså å beregne divergensen til rad k i σ for å finne kraftbidraget i den kartesiske koordinatretningen e_k. La oss først skrive opp

$$\sigma_1 = \nu_1 \left(\nabla v_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^T \right) + \nu_2 e_1 \nabla \cdot v$$

og så beregne

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \sigma_1 = \nu_1 &\left(\Delta v_1 + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3 \partial x_1} \right) \\
&+ \nu_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \\
&= \nu_1 \Delta v_1 + (\nu_1 + \nu_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nabla \cdot v \right).
\end{aligned}
$$

I den siste likheten har jeg antatt at det er greit å bytte plass på blandete partiellderiverte. Samme beregning gir

$$
\nabla \cdot \sigma_2 = \nu_1 \Delta v_2 + (\nu_1 + \nu_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nabla \cdot v \right)
$$

$$
\nabla \cdot \sigma_3 = \nu_1 \Delta v_3 + (\nu_1 + \nu_2) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nabla \cdot v \right)
$$

så om vi legger den vanlige vektortolkingen av Δv til grunn, kan disse tre likningene sammenfattes slik

$$
\nabla \cdot \sigma = \nu_1 \Delta v + (\nu_1 + \nu_2) \nabla \left(\nabla \cdot v \right)
$$

slik at Newtons andre lov blir

$$
\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = -\frac{\nabla p}{\rho} - g + \frac{1}{\rho} \left(\nu_1 \Delta v + (\nu_1 + \nu_2) \nabla (\nabla \cdot v) \right).
$$

Egentlig er det litt feil å kalle det "Newtons andre lov", for det var Euler som introduserte denne måten å gjøre opp kraftregnskap på omtrent femti år etter Newton publiserte Principia. Derfor kalles de utvidete bevegelseslovene **Newton-Euler-likningene**:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Newton-Euler_equations`