4 - 4 - MAXWELLS LOVER

Før vi går løs på Maxwells lover må vi prate litt om tid. Matematisk sett er det ikke forskjell på posisjonen $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ og tiden t, men vi må skille dem på grunn av fysikken. For å indikere tidsderivert, kommer jeg til å bruke den gode gamle newtonprikken:

$$\dot{f}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}$$

Husk at ∇-operatoren kun skal virke på de romlige koordinatene.

$\boxed{0}$ La $f(x,t) = x_1 x_2 + x_3 t$. Finn $\dot{f}$ og ∇f.

James Clerk Maxwell publiserte på 1860-tallet den første komplette modellen av elektromagnetisme. Han formulerte det som noen og tyve forskjellige regler, men Oliver Heaviside kondenserte alt ned til dette inhomogene differensiallikningssystemet noen år etter Maxwells originale publikasjon:

Gauss' lov: $\nabla \cdot E = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ **Gauss' lov for magnetisme:** $\nabla \cdot B = 0$

Faradays lov: $\nabla \times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$ **Amperes lov:** $c^2 \nabla \times B = \dfrac{\partial E}{\partial t} + \dfrac{J}{\epsilon_0}$

Det elektriske feltet E og **det magnetiske feltet** B er de ukjente, mens **ladningstettheten** ρ og **strømtettheten** J er gitte funksjoner. Permittitiviteten i vakuum ϵ_0 kjenner vi fra før, og c er lyshastigheten i vakuum. Vi skal utlede forskjellige konsekvenser av Maxwells lover. La oss begynne med en viktig anvendelse av teoremene vi har lært i begynnelsen av semesteret.

$\boxed{1}$ La Ω være et område i $\mathbb{R}^3$ og Σ en flate i $\mathbb{R}^3$. Utled Maxwells lover på integralform:

$$\int_{\partial\Omega} E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\Omega \rho \, dx \qquad \int_{\partial\Omega} B \cdot dS = 0$$

$$\int_{\partial\Sigma} E \cdot ds = -\frac{d}{dt} \int_\Sigma B \cdot dS \qquad c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\Sigma J \cdot dS + \frac{d}{dt} \int_\Sigma E \cdot dS$$

Hvis du ikke har vendt deg til den nye minimalistiske notasjonen for kurve-, flate- og trippelintegraler, kan du skrive Maxwells lover slik:

$$\iint_{\partial\Omega} E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_\Omega \rho \, dx \qquad \iint_{\partial\Omega} B \cdot dS = 0$$

$$\int_{\partial\Sigma} E \cdot ds = -\frac{d}{dt} \iint_\Sigma B \cdot dS \qquad c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_\Sigma J \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_\Sigma E \cdot dS$$

Det er en god strategi å alltid starte med å gjøre så mange forenklinger som mulig når man skal studere noe nytt og komplisert. I elmag pleier man å begynne med to forenklende antakelser for å komme igang. Den første er at feltene er **statiske**, altså at de ikke avhenger av t:

$$\dot{E} = 0 \qquad\qquad \dot{B} = 0$$

Den andre antagelsen er at vi er i **tomt rom**, altså ingen ladnings- eller strømtetthet:

$$\rho = 0 \qquad\qquad J = 0$$

La oss først anta både tomt rom og statiske felter.

$\boxed{2}$ Hva kan du da si om E og B?

La oss så skru av tomt rom, men beholde antagelsen om statiske felter. Da får vi et dekoblet likningssett:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad\qquad \nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = 0 \qquad\qquad c^2 \nabla \times B = \frac{J}{\epsilon_0}$$

Studiet av de to likningene for E kalles **elektrostatikk**,[1] mens studiet av de to for B kalles og **magnetostatikk**[2] Det elektriske feltet er et sirkulasjonsfritt vektorfelt med en gitt divergens, mens magnetfeltet er et divergensfritt felt med en gitt sirkulasjon. La oss begynne med E.

$\boxed{3}$ Forklar at det elektriske feltet er konservativt og at potensialet tilfredsstiller Poissons likning.

Det er faktisk slik at Gauss' lov og antagelsen om sfærisk symmetri impliserer coloumbs uttrykk for det elektriske feltet fra en punktladning.

$\boxed{4}$ Utled at feltstyrken til en punktladning må gå som $1/r^2$ fra Gauss' lov på integralform.

Nå ser vi litt på B. Dette er noe mer komplisert. Så vidt man vet, finnes det ingen magnetisk monopol,[3] altså ingen magnetisk punktladning.

$\boxed{5}$ Vis dette.

På samme måte som for den elektriske punktladningen, kan vi utlede at den magnetiske feltstyrken rundt en lang strømførende ledning med konstant strømstyrke må gå som $1/s$.

$\boxed{6}$ Vis dette ut fra Amperes lov på integralform og antagelsen om radiell symmetri.

Elektrostatiske felter er en harmoniske funksjoner i tomt rom. En liknende påstand er sann for magnetostatiske felter, men det er litt mer komplisert siden det er divergensen og ikke sirkulasjonen som er null.

$\boxed{7}$ Vis at B har vektorpotensiale der komponentene tilfredsstiller Poissons likning.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Electrostatics
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetostatics
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_monopole

Så vidt jeg vet var det omtrent slik Maxwell oppdaget at synlig lys er elektromagnetiske bølger. Han visste ikke i utgangspunktet at c var lyshastigheten i disse likningene, men eksperimentelle målinger gav verdier som lå påfallende nært til lyshastigheten. [4] La oss nå skru på tomt rom, men av antagelsen som statiske felter:

$$\nabla \cdot E = 0 \qquad \nabla \cdot B = 0$$
$$\nabla \times E = -\dot{B} \qquad c^2 \nabla \times B = \dot{E}$$

Tar vi laplaceoperatoren på et vektorfelt, mener vi på hver komponent slik: $\Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix}$

$\boxed{8}$ Utled bølgelikningene $\ddot{E} = c^2 \Delta E$ og $\ddot{B} = c^2 \Delta B$.

I populærvitenskapelige fremstillinger av elektromagnetiske bølger er E - og B - feltene tegnet som ortogonale på hverandre og på propagasjonsretningen. Dette gjelder kun tomt rom.

$\boxed{9}$ Vis at dersom bølgefunksjonene $E(x,t) = E_0 e^{i(k\cdot x - ct)}$ og $B(x,t) = B_0 e^{i(k\cdot x - ct)}$ skal tilfredsstille Maxwells likninger, må de konstante vektorene E_0, B_0 og k være innbyrdes ortogonale.

Når man skal overføre elektrisk energi med høy frekvens er det upraktisk å bruke ledninger, for man søler den elektriske energien ut i rommet og så lager du returstrømmer og fandens oldemor. I ubåt må alle elektriske ledninger tvinnes. Derfor er det vanlig å overføre elektrisk energi på høy frekvens gjennom bølgeledere. [5]

La oss nå skru av både tomt rom og antagelsen om statiske felter. En konsekvens av Maxwells lover er at ladning ikke kan oppstå eller forsvinne. Dette formuleres som en såkalt **kontinuitetslikning**.[6] I elektromagnetisme ser den slik ut:

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0$$

$\boxed{10}$ Utled.

Kontinuitetslikningen kan selvfølgelig også uttrykkes på integralform:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_\Omega \rho \, dx + \iint_{\partial\Omega} J \cdot dS = 0.$$

$\boxed{11}$ Utled denne også.

Kraften på en partikkel med ladning q som reiser med farten v er

$$F = q\,(E + v \times B)\,.$$

Dette uttrykket kalles **Lorentzkraften**.[7]

$\boxed{12}$ Vis at det magnetiske feltet aldri kan gjøre arbeid på en partikkel.

Og så er det rosinen i pølsen.

$\boxed{13}$ Utled elementlovene for spole- og kondensator fra Maxwells lover.

[4] Første gang målt av Ole Rømer ved å studere rare avvik i tabellene for når Jupiters måner kommer ut av Jupiters skygge.

[5] En hul kanal med stående elektriske bølger, se her: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_24.html Du kan faktisk lage en kondensator av en hul sylinder: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_23.html

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Continuity_equation

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_force