TMA4101/4106/4111/4121

4 - 4 - MAXWELLS LOVER - LF

$\boxed{0}$ Så $\dot{f}(x,t) = x_3$ og $\nabla f(x,t) = (x_2, x_1, t)$.

$\boxed{1}$ Maxwells likninger på differensialform er:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \cdot B = 0$$
$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
$$c^2 \nabla \times B = \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t}$$

De to første kan vi trippelintegrere over området $\Omega \in \mathbb{R}^3$

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot E \, dx = \frac{}{\epsilon_0} \iiint_\Omega \rho \, dx$$
$$\iiint_\Omega \nabla \cdot B \, dx = 0$$

og massere med divergensteoremet på venstre side:

$$\iint_{\partial\Omega} E \cdot dS = \frac{}{\epsilon_0} \iiint_\Omega \rho \, dx$$
$$\iint_{\partial\Omega} B \cdot dS = 0$$

De to siste kan vi fluksintegrere over flaten $\Sigma \in \mathbb{R}^3$

$$\iint_\Sigma (\nabla \times E) \cdot dS = -\frac{d}{dt} \iint_\Sigma B \cdot dS$$
$$\iint_\Sigma (\nabla \times B) \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_\Sigma J \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_\Sigma E \cdot dS$$

og massere med Stokes' teorem på venstre side:

$$\int_{\partial\Sigma} E \cdot ds = -\frac{d}{dt} \iint_\Sigma B \cdot dS$$
$$c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_\Sigma J \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_\Sigma E \cdot dS$$

$\boxed{2}$ Her finnes potensialer og de er harmoniske funksjoner. Potensialet til E er også kjent som spenning. Potensialet til B kommer vi tilbake til.

$\boxed{3}$ Likningen $\nabla \times E = 0$ impliserer at det finnes V slik at $E = -\nabla V$, og likningen

$$\rho/\epsilon_0 = \nabla \times E = -\nabla \cdot (\nabla V) = -\Delta V$$

er Poissons likning. Dette er en dreven variant av Laplaces likning og vi kommer tilbake til det om noen uker.

$\boxed{4}$ Hvis du har en punktladning og antar at feltstyrken er den samme i alle retninger ut fra ladningen, kan vi slå en kule Ω om ladningen med radius r og ladningen i sentrum og se at

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_\Omega \rho\, dx = \int_{\partial\Omega} E \cdot dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r)r^2 \sin\varphi\, d\theta d\varphi = 4\pi r^2 E(r)$$

slik at

$$E(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0}.$$

Siste ord er ikke sagt om dette, følg med i uken om harmoniske funksjoner.

$\boxed{5}$ En punktladning er en liten ting som sitter inni et område Ω og sørger for at feltet dens har netto fluks ut av Ω. Men vi har alltid $\int_{\partial\Omega} B \cdot dS = 0$ alltid, så Faradays lov sier at det ikke finnes noe slikt. Ingen har ihvertfall funnet en så langt.

$\boxed{6}$ Så hvis vi tenker at det går en uendelig lang strømførende ledning langs z-aksen og så legger vi en liten sirkelskive Σ med radius s rundt denne, sier Amperes lov at

$$c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0}\int_\Sigma J \cdot dS.$$

Høyresiden av denne likningen er bare en konstant, og antar vi at $B = B(s)e_\theta$, får vi

$$2\pi s c^2 B(s) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_\Sigma J \cdot dS.$$

slik at

$$B(s) = \frac{1}{2\pi s c^2 \epsilon_0}\int_\Sigma J \cdot dS.$$

$\boxed{7}$ Siden $\nabla \cdot B = 0$ finnes det alltid et vektorpotensiale A. Setter vi dette inn i Amperes lov, får vi

$$c^2 \nabla \times \nabla \times A = \frac{J}{\epsilon_0}$$

og nå kan vi bruke oppgave 13 i økt 4-1 og skrive

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \Delta A.$$

Nå vet du at det finnes mange mange vektorpotensialer, og velger vi det slik at $\nabla \cdot A = 0$, får vi

$$c^2 \Delta A = -\frac{J}{\epsilon_0}$$

som er Poissons likning i hver komponent. Nok en grunn til å studere harmoniske funksjoner om et par uker.

$\boxed{8}$ La oss først tidsderivere $c^2\nabla \times B = \dot{E}$ og få $c^2\nabla \times \dot{B} = \ddot{E}$. Men

$$\nabla \times \dot{B} = -\nabla \times \nabla \times E = -\nabla(\nabla \cdot E) + \Delta E$$

og er vi i tomt rom forsvinner det første leddet på høyresiden, slik at

$$\ddot{E} = c^2 \Delta E.$$

Likningen $\ddot{B} = c^2 \Delta B$ utledes på samme måte.

$\boxed{9}$ La oss først sette uttrykkene inn i Maxwells lover og få

$$E_0 \cdot k = 0 \qquad\qquad B_0 \cdot k = 0$$
$$E_0 \times k = cB_0 \qquad\qquad cB_0 \times k = -E_0$$

og nå er det rimelig klart at alle disse vektorene er ortogonale på hverandre. Kryssproduktet av E og B kalles **poyntingvektoren**:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Poynting_vector`

$\boxed{10}$ Vi deriverer den første likningen og får

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

og tar divergensen til den siste likningen og får

$$0 = \nabla \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0}\nabla \cdot J.$$

Hvis vi antar at det er greit å bytte rekkefølge på tidsderivert og divergens, kan vi sette den første likningen inn i den siste og se at

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0.$$

$\boxed{11}$ Her er det bare å trippelintegrere kontinuitetslikningen over et område Ω og bruke divergensteoremet på $\iiint \nabla \cdot J$. Vi må i tillegg anta at det er greit å flytte den tidsderiverte på ρ ut av integralet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\Omega \rho \, dx + \iint_{\partial\Omega} J \cdot dS = 0.$$

$\boxed{12}$ Lett! Arbeidet fra B på partikkelen mellom punktene $x(a)$ og $x(b)$ på Γ er

$$\int_\Gamma F \cdot ds = q\int_a^b (v \times B) \cdot v \, dt = 0$$

siden kryssproduktet står ortogonalt på begge faktorene i kryssproduktet.