4 - 3 - VEKTORKALKULUS III

For å forstå rotasjonen til et vektorfelt, kan det være gunstig å ha litt peiling på hva som skjer med ting som opplever rotasjon.

$\boxed{1}$ En partikkel reiser langs en sirkulær trajektorie $x(t) = e_1 r \cos\theta(t) + e_2 r \sin\theta(t)$ og påvirkes av kraften F. Sett opp arbeidet mellom to punkter på trajektorien. Dersom du gjør det riktig, skal du få en integrand som er lengden av kryssproduktet mellom to størrelser.

Størrelsen

$$\tau = x \times F$$

kalles **dreiemomentet** til F om x. Dersom en partikkel reiser langs en sirkulær trajektorie i tre dimensjoner, kan du med litt mer komplisert regning utlede at den tilsvarende størrelsen er

$$\tau = x \times F \cdot y$$

der y er en enhetsvektor som indikerer rotasjonsaksen. Bevegelsesmengde er $p = mv$. **Drivmomentet** er

$$L = x \times p.$$

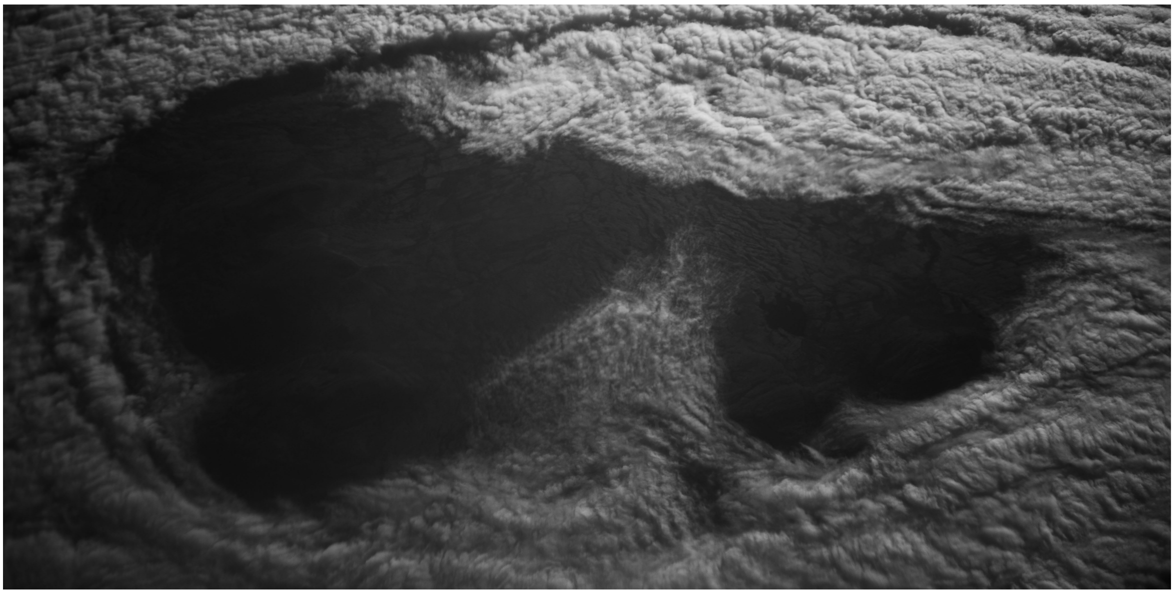
Drivmomentet for partikkelen over er gitt ved $mr^2\dot{\theta}e_3$.

$\boxed{2}$ Vis.

Newtons andre lov er $F = \dot{p}$ og versjonen for angulært moment lyder slik:

$$\tau = \dot{L}$$

$\boxed{3}$ Utled og forklar hvorfor en snurrende kunstskøyteløper spinner fortere om vedkommende fordeler massen sin tettere på rotasjonsaksen.



Nå kan vi gå litt videre og se på en roterende skive, for eksempel kappeskiven på en vinkelsliper eller sagbladet på en sirkelsag. La oss si at origo sitter fast i rommet og i sentrum av den roterende skiven. Skiven roterer med vinkelhastigheten ω og har radius r.

$\boxed{4}$ Sett opp en funksjon som beskriver hastigheten på hvert punkt på skiven, både i kartesiske koordinater og i polarkoordinater. Hva er rotasjonen?

Den vanlige tolkningen av oppgaven over er noe sånt som at dersom du slipper en liten kork ned i hastighetsfeltet f, vil den rotere med hastigheten $\omega = \frac{1}{2}\nabla \times f$. Jeg vet ikke om det finnes noe godt norsk ord for denne størrelsen, men på engelsk kalles den "rotation". Det vi kaller "rotasjon" kaller de "curl". La oss nå beregne rotasjonen til noen andre hastighetsfelter:

$\boxed{5}$ $f(s,\theta) = se_\theta$ $\boxed{6}$ $f(s,\theta) = e_\theta$ $\boxed{7}$ $f(s,\theta) = e_\theta/s$ $\boxed{8}$ $f(s,\theta) = e_\theta/s^2$

På samme måte som for divergensen, kan vi sette opp en teknisk vanskeligere men mer intuitiv definisjon av rotasjonen til et vektorfelt. La Σ være en plan flate i $\mathbb{R}^3$ med areal $|\Sigma|$ og enhetsnormal vektor v og la f være et vektorfelt. rotasjonen til f langs v i punktet Σ skrumper inn til er

$$(\nabla \times f)\cdot v = \lim_{|\Sigma|\to 0} \frac{1}{|\Sigma|} \oint_{\partial\Omega} f \cdot ds.$$

$\boxed{9}$ Bruk kontrollvolumtankegangen til å utlede at

$$\nabla \times f = e_1\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) + e_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) + e_3\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$

Kontrollvolumtankegangen kan brukes til å utlede uttrykk for rotasjonen i kule- og sylinderkoordinater. Det skal du få slippe, men hvis du syntes det var kløne te å konvertere til kartesiske koordinater i oppgave 5-8, vil du kanskje sette pris på disse formlene. Her er rotasjon i sylinderkoordinater:

$$\nabla \times f = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial f_z}{\partial \theta} - \frac{\partial f_\theta}{\partial z}\right)e_s + \left(\frac{\partial f_s}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial s}\right)e_\theta + \frac{1}{s}\left(\frac{\partial s f_\theta}{\partial s} - \frac{\partial f_s}{\partial \theta}\right)e_z$$

$\boxed{10}$ Gjør 5-8 på nytt i sylinderkoordinater dersom du ikke gjorde det i sted.

Merk ellers at når vi sier at vektorfeltet er gitt i "sylinderkoordinater", kan dette bety både at de uavhengige variablene er (s,θ,z), altså at vi har en relasjon på formen

$$f(s,\theta,z) = h(g(s,\theta,z))$$

der g er sylinderkoordinattransformasjonen og h et vektorfelt i kartesiske uavhengige variable, men det kan også bety at vektorfeltet er dekomponert i sylinderkoordinatbasisen:

$$f = f_s e_s + f_\theta e_\theta + f_z e_z$$

og ikke i standardbasisen. Det er ingenting prinsipielt i veien for å la de uavhengige variablene være (s,θ,z), men dekomponere f i standardbasisen:

$$f(s,\theta,z) = f_1(s,\theta,z)e_1 + f_2(s,\theta,z)e_2 + f_3(s,\theta,z)e_3$$

så av og til må man skjønne av kontekst hva som menes med "vektorfelt i sylinderkoordinater".

I økt 3-1 lærte vi at divergensen til rotasjonen er null og at rotasjonen til gradienten er null:

$$\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0 \qquad\qquad \nabla \times (\nabla f) = 0$$

De motsatte implikasjonene holder også under noen milde betingelser. La f være et glatt vektorfelt. Da impliserer

$$\nabla \cdot f = 0 \qquad \text{at} \qquad f = \nabla \times g$$

for et vektorfelt g, og

$$\nabla \times f = 0 \qquad \text{at} \qquad f = \nabla h$$

for et skalarfelt h. Disse kalles henholdsvis **vektorpotensialet** og **skalarpotensialet**. Dersom $\nabla \times f = 0$ sier vi at f er **rotasjonsfritt**, og dersom $\nabla \cdot f = 0$ sier vi at f er **divergensfritt**.

$\boxed{11}$ Finn skalar- og/eller vektorpotensialer til vektorfeltene i de foregående øktene. Hva skjer om f er både rotasjonsfritt og divergensfritt?

Den første varianten av Greens teorem generaliseres til noe som kalles **Stokes teorem**.[1] La Σ være en flate i rommet, med randkurve $\partial\Sigma$, og f er glatt og så videre:

$$\oint_{\partial\Sigma} f \cdot ds = \iint_{\Sigma} \nabla \times f \cdot dS$$

Dette er også en generalisering av analysens fundamentalteorem, og sier at arbeidet f gjør på en partikkel som reiser rundt $\partial\Sigma$ er det samme som fluksen til rotasjonen til f gjennom Σ. Akkurat som med divergensteoremet bruker vi Stokes' teorem primært til å håndtere overgangen mellom fysiske lover på differensial- og integralform. Men la oss også her ta noen goodhartklassikere fra TMA4105.

$\boxed{12}$ La $\Omega \in \mathbb{R}^3$ være begrenset av paraboloidene $x_3 = x_1^2 + (x_2+1)^2$ og $x_3 = 10 - x_1^2 - (x_2-1)^2$. La Γ betegne skjæringskurven mellom dem og la $f(x) = (x_1 + x_2, x_2 - x_1, x_1^2 + x_2^2)^T$. Regn ut

$$\oint_{\Gamma} f \cdot ds$$

der Γ er orientert mot klokken sett ovenfra.

$\boxed{13}$ La Σ være den delen av ellipsoideskallet $x_1^2 + x_2^2 + 8(x_3-1)^2 = 9$ hvor $x_3 \geq 0$, og la vektorfeltet $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$f(x) = \left(x_1x_3 - 5x_2\cos x_3, 5x_1e^{x_3}, 6x_1x_2e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)$$

Regn ut $\iint_{\Sigma} \nabla \times f \cdot dS$.

$\boxed{14}$ Har du noen ide om hvordan du kan se at rotasjonsfrihet impliserer at f er konservativt?

$\boxed{15}$ Det er noen flater som ikke går å bruke Stokes' teorem på. Finn en slik.

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Stokes'_theorem`

Til slutt litt om integraltegn. Jeg har skrevet divergensteoremet slik:

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot f = \oiint_{\partial\Omega} f \cdot dS$$

og Stokes' teorem slik:

$$\oint_{\partial\Sigma} f \cdot ds = \iint_\Sigma \nabla \times f \cdot dS$$

I begge disse likningene er det en del overflødig notasjon. Dersom vi har spesifisert Ω og Σ, er det ikke egentlig nødvendig med sirklene på linje- og fluksintegralene, og det er egentlig ikke nødvendig med doble og triple integraltegn, for vi vet at Ω er et område i $\mathbb{R}^3$ og at Σ er en flate i $\mathbb{R}^3$. Her er en litt mer minimalistisk notasjon:

- Arbeid: $\int_\Gamma g \cdot ds$
- Fluksintegral: $\int_\Sigma g \cdot dS$
- Flateintegral: $\int_\Sigma f\, dS$
- Trippelintegral: $\int_\Omega f\, dx$

Denne notasjonen er vanlig i avansert faglitteratur, og ser du nøye på integralene, ser du at de er *akkurat* forskjellige nok til at du vet hva som er hva, så lenge du vet at Ω være et område i $\mathbb{R}^3$, at Σ en flate i $\mathbb{R}^3$ at Γ en kurve i $\mathbb{R}^3$. At $f : \Omega \to \mathbb{R}$ og $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ er implisert hvis du vet hva integralene betyr.

$\boxed{16}$ Skriv divergensteoremet og Stokes' teorem med denne notasjonen.