4 - 3 - VEKTORKALKULUS III - LF

$\boxed{1}$ Arbeidet som F gjør på partikkelen er

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F \cdot ds &= \int_a^b \left(-F_1(\cos\theta(t), \sin\theta(t))\sin\theta(t) + F_2(\cos\theta(t), \sin\theta(t))\cos\theta(t)\right) r\dot{\theta}(t)\; dt \\ &= \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} re_s \times (F_1 e_1 + F_2 e_2)\; d\theta \\ &= \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} x \times F \, d\theta.\end{aligned}$$

Innmaten i dette integralet er dreiemomentet til F om origo, så huskeregelen er at dreiemomentet er den størrelsen du integrerer med hensyn på θ for å finne arbeid på noe som dreier om en rotasjonsakse.

$\boxed{2}$ Vi har

$$x(t) = e_1 r\cos\theta(t) + e_2 r\sin\theta(t)$$

og

$$v(t) = -e_1 r\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) + e_2 r\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$$

så drivmomentet blir

$$L = x \times p = mr^2\dot{\theta}e_3.$$

Newtons andre lov er $F = \dot{p}$ og versjonen for angulært moment lyder slik:

$$\tau = \dot{L}$$

$\boxed{3}$ La oss for enkelhets skyld anta at m er konstant. Vi deriverer L og bruker $F = \dot{p}$ og at kryssproduktet mellom parallelle vektorer er null, og får

$$\dot{L} = \dot{x} \times p + x \times \dot{p} = x \times F.$$

Hvis det ikke er dreiemoment er drivmomentet konservert siden $\dot{L} = 0$. Å beregne drivmomentet for en ting med utstrekning er et trippelintegral, men hvis du se på partikkelen i oppgaven over, så ser du at om r minker må noe annet øke og det eneste som kan øke er $\dot{\theta}$. Så om du tenker på kunstløperene som en partikkel i posisjonen til kunstløperens massesenter, vil rotasjonshastigheten øke om massesenteret trekkes inn mot rotasjonsaksen.

$\boxed{4}$ Dette regna vi i 3-1 slik, både i sylinderkoordinater og i kartesiske koordinater:

$$\begin{aligned}v &= r\omega e_\theta \\ &= r\omega(-e_1\sin\theta + e_2\cos\theta) \\ &= \omega(-e_1 x_2 + e_2 x_1) = \omega\begin{pmatrix}-x_2 \\ x_1 \\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Rotasjonen blir 2ω.

$\boxed{5}$ Lureoppgave, dette er det samme som forrige oppgave.

$\boxed{6}$ Nå skal vi foregripe begivenhetenes gang og bruke formelen for rotasjon i sylinderkoordinater og få at

$$\nabla \times f = \frac{1}{s}\frac{\partial s f_\theta}{\partial \theta} e_z = \frac{1}{s} e_z$$

siden $f_\theta = 1$ og $f_s = f_z = 0$.

$\boxed{7}$ og $\nabla \times f = 0$, noe som er åpenbart for alle som kjenner magnetfeltet rundt en rett strømførende ledning og

$\boxed{8}$ og $\nabla \times f = -e_z/s^3$.

$\boxed{9}$ Jeg ligger litt etter og skal skrive ned, inntil videre kan du se her: `https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates#endnote_Alpha`

$\boxed{11}$ Dersom f er rotasjonsfritt finnes en potensialfunksjon V, og om gradienten til denne er divergensfri, må V være harmonisk. Så både divergens- og rotasjonsfrihet impliserer at det finnes et harmonisk skalarpotensiale. Av og til er det innlysende hva som er korrekt potensiale, og det er bare å skrive opp og dobbeltsjekke, mens av og til må man regne. Her kommer de:

Vektorfeltet (x_1, x_2, x_3) har potensialfunksjon $V(x) = \frac{1}{2}|x|^2 + c$ der c er en vilkårlig konstant.

Den laminære vannstrømmen $(x_3, 0, 0)$ er divergensfri, og her vil du kanskje oppdage at det finnes massevis av vektorpotensialer, for eksempel $(0, -\frac{1}{2}x_3^2, 0)$ gjør jobben, men det gjør også $(0, -\frac{1}{2}x_3^2, 0) + g(x)$ der g er et tilfeldig divergensfritt vektorfelt. Av og til må man velge potensialet på en spesiell måte - det skal vi se i neste uke.

Coloumbfeltet har potensialfunksjon $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|x|}$, som vi sjekket i TMA4111.

Den roterende skiva er også divergensfri, så her finnes det mange mange vektorpotensialer - for eksempel $-\frac{1}{2}(0, x_2^2, x_1^2)$ funker fint.

Vektorfeltene i oppgave 4 og 5 i økt 3-2 er hverken divergens- eller rotasjonsfrie, så det finnes ikke potensialer.

Vektorfeltene i 6-8 i denne økten er alle divergensfrie, dette er lett å se fra formelen for divergens i sylinderkoordinater:

$$\nabla \cdot f = \frac{1}{s}\frac{\partial s f_s}{\partial s} + \frac{1}{s}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Så de har vektorpotensialer. Rotasjonen sjekket vi i oppgave 5-8 og det var kun den i oppgave 7 som ikke hadde rotasjon, så den er gradienten til en harmonisk funksjon. Gradientformelen

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial s} e_s + \frac{1}{s}\frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} e_z$$

gir

$$\frac{1}{s}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{s},$$

slik at $V = \theta + c$ der c er konstant gjør jobben. For den i oppgave 6 vil for eksempel ze_s eller $-se_z$ gjøre jobben, og du klarer nok å finne noe på oppgave 8.

$\boxed{13}$ Ellipsoideskallet skjærer x_1x_2-planet i enhetssirkelen, så her er det bare å regne ut den andre siden av stokes' teorem slik:

$$\int_{\partial\Sigma} f \cdot ds = 5\int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = 10\pi,$$

gitt at utnormalen i flateintegralet i oppgaven peker oppover.

$\boxed{14}$ Dette er lett å huske om man husker stokes teorem siden stokes teorem sier at

$$\oint_{\partial\Sigma} f \cdot ds = 0$$

dersom $\nabla \times f = 0$.

$\boxed{15}$ Det er viktig at flaten Σ er **orienterbar**:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Orientability`
De fleste flater du kommer til å støte på er det. Det mest kjente unntaket er møbiusflaten:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Möbius_strip`
Noen studenter i TMA4106 tipsa meg om denne:
`https://www.youtube.com/watch?v=sToqbqP0tFk&t=484s`