4 - 2 - VEKTORKALKULUS II

Hvis du slår opp i en typisk formelsamling, [1] vil du finne uttrykket

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial f}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

for laplaceoperatoren i polarkoordinater. Vi utledet denne i TMA4111 og det er for å sitere min svigerfar "en helvetes prosedyre" - antagelig har du fortrengt det. Å utlede den tilsvarende formelen

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$$

i kulekoordinater er selvfølgelig enda verre. Med mindre du kan noen lure triks. La f være et skalarfelt. Den partiellderiverte med hensyn på variabelen x_k er

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_k)-f(x)}{h}.$$

Vi skriver

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla_v f(x) = v\cdot\nabla f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+hv)-f(x)}{h}$$

for den retningsderiverte[2] i retningen gitt av enhetsvektoren v.

$\boxed{1}$ Bruk retningsderivert og utled uttrykket for gradienten i kulekoordinater:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}e_r + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta}e_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}e_\varphi$$

[1] For eksempel her: `https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates`
[2] Se her for andre skrivemåter: `https://en.wikipedia.org/wiki/Directional_derivative`

Et sentralt verktøy i de store pde-modellene er **kontrollvolumet**.[3] Dette er et fiktivt volum som er bitte lite og som brukes til å utlede relasjoner på integral- eller differensialform i flervariabel kalkulus. Vi skal introdusere tankegangen gjennom å skrive opp den korrekte definisjonen av divergens. La Ω være et område i $\mathbb{R}^3$ med volum $|\Omega|$ og f et vektorfelt. Divergensen til f er:

$$\nabla \cdot f = \lim_{|\Omega| \to 0} \frac{1}{|\Omega|} \oiint_{\partial\Omega} f \cdot dS$$

Her er det underforstått at $\nabla \cdot f$ på venstre side er evaluert i det punktet x som Ω skrumper inn til. Fra definisjonen ser vi tydelig at divergens er **utstrømning per volum**.

$\boxed{2}$ Bruk definisjonen og et kontrollvolum til å utlede at

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

i kartesiske koordinater.

La oss nå si at du har et vektorfelt f som er gitt i kulekoordinatbasisen:

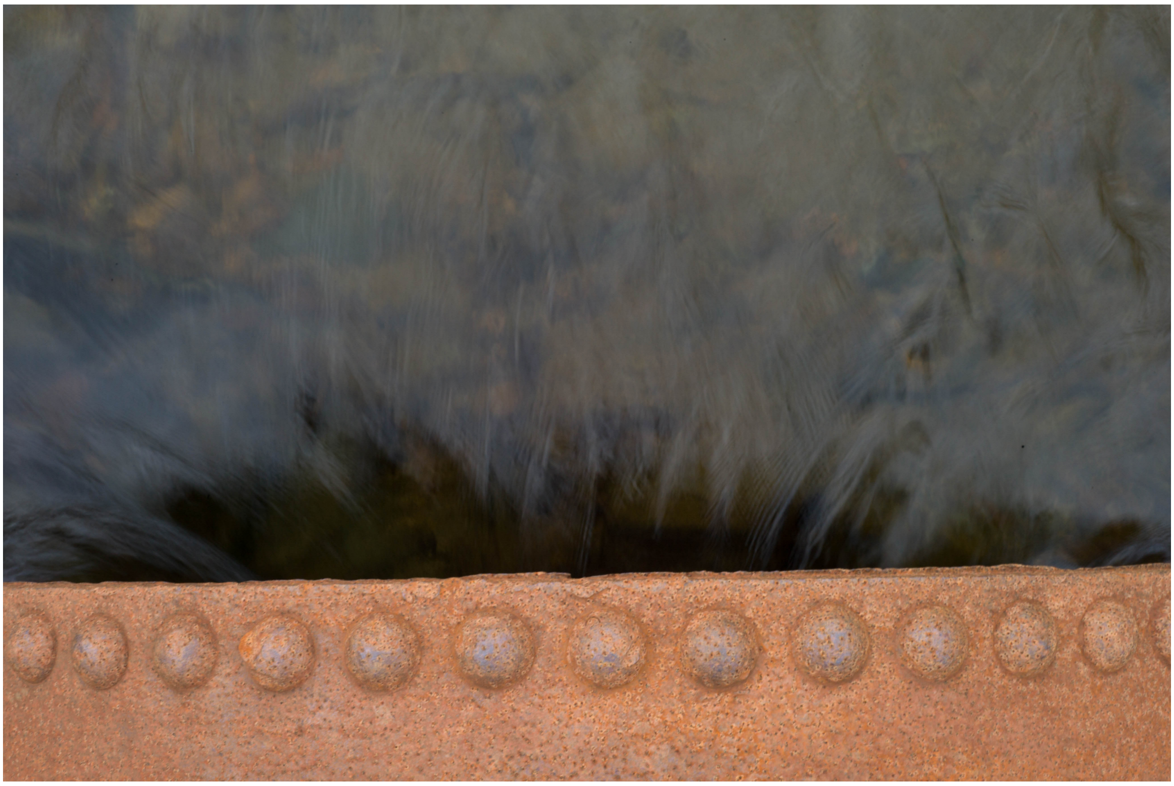
$$f = f_r e_r + f_\theta e_\theta + f_\varphi e_\varphi.$$

Her betyr f_r vektorfeltets komponent i retningen e_r, og komponentene er funksjoner av (r, θ, φ).

$\boxed{3}$ Utled uttrykket for divergensen i kulekoordinater:

$$\nabla \cdot f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 f_r\right) + \frac{1}{r \sin\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(f_\varphi \sin\varphi\right) + \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} \right)$$

Nå kan du få tak i laplaceoperatoren i kulekoordinater ved å huske at $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$.



[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Control_volume

Kontrollvolumideen brukes også til å utlede en tredimensjonal variant av analysens fundamentalteorem som kalles **divergensteoremet**.[4] Denne er analog til den fluksversjonen av Greens teorem. La $\Omega \in \mathbb{R}^3$ og anta $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er glatt og alt det der, da er

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot f = \oiint_{\partial\Omega} f \cdot dS.$$

Dette utsagnet sier at f sin netto utstrømning fra Ω skal være lik f sin ekspansjon inne på Ω. Den viktigste anvendelsen er at den lar oss sjonglere mellom fysiske lover på integral- og differensialform. La oss ta noen klassikere fra TMA4105 sånn mest for kosens skyld. Disse er designet for å teste om en typisk sivingstudent har skjønt divergensteoremet. [5]

$\boxed{4}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av paraboloidene

$$x_3 = x_1^2 + (x_2+1)^2 \qquad \text{og} \qquad x_3 = 10 - x_1^2 - (x_2-1)^2$$

og la Γ betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene. La vektorfeltet $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$f(x) = (x_1 + x_2, x_2 - x_1, x_1^2 + x_2^2)$$

og regn ut

$$\oiint_{\partial T} f \cdot dS$$

der ∂T er randen til T og enhetsnormalen N peker ut fra T.

$\boxed{5}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av flatene $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 7}$, $x_3 = 0$ og $x_3 = 2$. La vektorfeltet $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$f(x) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2, x_3 + 1).$$

Hva er fluksen ut av den krumme delen til randen til T?

Å utlede divergensteoremet er noe for hardt for oss, men sett fra et fysikkperspektiv er det nesten innlysende. Masse kan ikke forsvinne eller oppstå og hva som går ut av $\partial\Omega$ må stå i forhold til ekspansjonen inne på Ω. Fra divergensteoremet følger en del andre nyttige formler vi kommer til å få bruk for. Bruk divergensteoremet til å utlede

$\boxed{6}$ $$\iiint_\Omega \Delta u \, dx = \oiint_{\partial\Omega} \nabla u \cdot dS$$

$\boxed{7}$ gaussgreenteoremet

$$\iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k} = \oiint_{\partial\Omega} u e_{nk} \, dS$$

der e_{nk} er komponent k i enhetsnormalvektoren ut av $\partial\Omega$.

$\boxed{8}$ delvisintegrasjonsformelen $$\iiint_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} + \iiint_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} = \oiint_{\partial\Omega} u v e_{nk} \, dS$$

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem

[5] I praksis tester den ikke det, men heller om en sivingstudent har trent masse på en bestemt type regneoppgave som er designet for å teste om en sivingstudent har skjønt divergensteoremet. Jf. Goodharts lov: https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC7901608/