4 - 2 - ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM III

$\boxed{1}$ Her er det viktig å forstå at nå har vi en funksjon h som gir oss tetthet eller konsentrasjon eller et annet skalarfelt, og så har vi putta kulekoordinatene

$$x = g(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

inn i denne og fått en ny funksjon

$$f(r, \theta, \varphi) = h(g(r, \theta, \varphi)).$$

Vi skal finne et eksplisitt uttrykk for gradienten til h, evaluert ved f og dekomponert i kulekoordinatbasisen. Kjerneregelen gir

$$f'(r, \theta, \varphi) = h'(g(r, \theta, \varphi))g'(r, \theta, \varphi),$$

som skrevet ut på matriseform blir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial \theta} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r & r\sin\varphi e_\theta & re_\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Her ser vi at

- $\frac{\partial f}{\partial r}$ er den retningsderiverte til h i retning e_r
- $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ er $r\sin\varphi$ ganger den retningsderiverte til h i retning e_θ
- $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ er r ganger den retningsderiverte til h i retning e_φ

Denne likningen forteller hvordan du må kompensere for at endring i (r, θ, φ)-koordinatsystemet ikke er det samme som endring i (r, θ, φ) i det kartesiske koordinatsystemet - når du øker θ eller φ blir det fortere endring i x om r er stor (dette gjelder begge vinkler) og endring i θ gir liten endring i x når $\sin\varphi$ er liten, altså nært polene.

Vi vet at $g'(r, \theta, \varphi)$ har ortogonale kolonner, så den er lett å invertere, håper du husker alt du lærte om ortogonale matriser i TMA4106. Vi ganger med den inverse av $g'(r, \theta, \varphi)$ fra høyre og får

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial \theta} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r^T \\ \frac{1}{r^2\sin^2\varphi} e_\theta^T \\ \frac{1}{r^2} e_\varphi^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Her kjenner vi igjen høyresiden som gradientvektoren til skalarfeltet, og venstresiden som den samme vektoren dekomponert i kulekoordinatbasisen. Dette er slik formelen egentlig burde vært skrevet opp.

$\boxed{2}$ La oss si at du har en liten rektangulær boks, parallell med koordinataksene og med ett hjørne i x og borterste hjørne i $x+h$. Volumet til boksen er $h_1h_2h_3$, utnormalvektorer for de seks sidene er bare standardbasisen i $\mathbb{R}^3$. Vi kan estimere den totale utstrømningen gjennom de seks sidene slik, håper du husker fluksintegraler fra TMA4111:

$$\Big(f_1(x+h_1e_1)-f_1(x)\Big)h_2h_3+\Big(f_2(x+h_2e_2)-f_2(x)\Big)h_1h_3+\Big(f_3(x+h_3e_3)-f_3(x)\Big)h_1h_2.$$

Tar vi ut volumet, får vi

$$h_1h_2h_3\Big(\frac{f_1(x+h_1e_1)-f_1(x)}{h_1}+\frac{f_2(x+h_2e_2)-f_2(x)}{h_2}+\frac{f_3(x+h_3e_3)-f_3(x)}{h_3}\Big).$$

og deler vi på volumet og lar $h\to 0$, får vi

$$\nabla\cdot f=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}.$$

$\boxed{3}$ Denne gjør vi på samme måte som forrige oppgave, det er bare litt mer jobb å sette opp alle fluksintegralene. La oss ta et rektangulært område i (r,θ,φ)-koordinatsystemet, med det ene hjørnet i (r_0,θ_1,φ_1) og det andre i $(r_2,\theta_2,\varphi_2)=(r_1+h_r,\theta_1+h_\theta,\varphi_1+h_\varphi)$. Volumet av bildet av dette under kulekoordinattransformasjonen er sånn omtrent

$$r_1^2\sin\varphi_1 h_rh_\theta h_\varphi$$

og bildet du får er omtrent det du får om du tar en enorm sirkelsag og skjærer ut en bit av jordskorpen, loddrett ned til en viss dybde og langs et rektangel på overflaten. (Noe som ligger dønn ned på jordskorpen vil jo ikke være et rektangel på grunn av jordkrumningen, men du skjønner hva jeg mener.) Fluksintegralene i retningene til e_r, e_θ og e_φ blir henholdsvis (håper du husker fluksintegraler fra TMA4111 - dette blir et svineri)

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_r(r_1+h_r,\theta,\varphi)(r_1+h_r)^2-f_r(r,\theta,\varphi)r_1^2\sin\varphi d\theta d\varphi\approx$$
$$\Big(f_r(r_1+h_r,\theta_1,\varphi_1)(r_1+h_r)^2-f_r(r_1,\theta_1,\varphi_1)r_1^2\Big)\sin\varphi_1h_\theta h_\varphi$$

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\Big(f_\theta(r,\theta+h_\theta,\varphi)-f_\theta(r,\theta,\varphi)\Big)rdrd\varphi\approx$$
$$\Big(f_\theta(r_1,\theta_1+h_\theta,\varphi_1)-f_\theta(r_1,\theta_1,\varphi_1)\Big)r_1h_rh_\varphi$$

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f_\varphi(r,\theta,\varphi_2)r\sin\varphi_2-f_\varphi(r,\theta,\varphi_1)r\sin\varphi_1drd\theta\approx$$
$$\Big(f_\varphi(r_1,\theta_1,\varphi+h_\varphi)\sin(\varphi_1+h_\varphi)-f_\varphi(r_1,\theta_1,\varphi_1)\sin\varphi_1\Big)r_1h_rh_\theta.$$

Legger vi sammen alle disse og deler på volumet får vi

$$\frac{1}{r_1^2\sin\varphi_1h_rh_\theta h_\varphi}\Big(\Big(f_r(r_1+h_r,\theta_1,\varphi_1)(r_1+h_r)^2-f_r(r_1,\theta_1,\varphi_1)r_1^2\Big)\sin\varphi_1h_\theta h_\varphi$$
$$+\Big(f_\theta(r_1,\theta_1+h_\theta,\varphi_1)-f_\theta(r_1,\theta_1,\varphi_1)\Big)r_1h_rh_\varphi$$
$$+\Big(f_\varphi(r_1,\theta_1,\varphi+h_\varphi)\sin(\varphi_1+h_\varphi)-f_\varphi(r_1,\theta_1,\varphi_1)\sin\varphi_1\Big)r_1h_rh_\theta\Big)$$

og lar vi volumet gå mot null, blir det

$$\nabla \cdot f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 f_r\right) + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi f_\varphi\right).$$

Litt grisete ble dette også. Men ikke så ille som om vi skulle satt kulekoordinatene inn i f og regna i vei slik som vi gjorde med polarkoordinater i TMA4111. Laplaceoperatoren får vi enkelt tak i ved å sette svaret fra oppgave 1 inn i denne og få

$$\begin{aligned}\Delta f =& \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\\ =& \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right).\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Banalt! Divergensen er 2 og volumet mellom paraboloidene er trivielt å beregne, dette gjorde vi i TMA4111. Setter vi paraboloidene lik hverandre, får vi

$$x_1^2 + (x_2+1)^2 = 10 - x_1^2 - (x_2-1)^2$$

som gir

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2 = 10$$

eller

$$x_1^2 + x_2^2 = 4$$

og volumet blir

$$\int_0^2\int_0^{2\pi}(8-2r^2)r\,dr\,d\theta = 16\pi$$

så korrekt svar er 32π.

$\boxed{5}$ Her må du regne ut fluksen gjennom topp og bunn og så trippelintegrere divergensen (som er 3) over volumet og så gjøre opp totalregnskapet og se hva som mangler - det er dette som går ut gjennom den krumme delen av ∂T. Gjesp.

$\boxed{6}$ Divergensteoremet sier at

$$\int_\Omega \nabla\cdot f = \int_{\partial\Omega} f\cdot dS$$

Dersom $f = \nabla u$, får vi

$$\int_\Omega \nabla\cdot\nabla u = \int_\Omega \Delta u$$

på den ene siden, og

$$\int_{\partial\Omega}\nabla u\cdot dS = \int_{\partial\Omega}\nabla u\cdot n\,dS = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS$$

der n er enhetsnormalvektoren ut av $\partial\Omega$. Divergensteoremet kan altså skrives slik:

$$\int_\Omega \Delta u = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS$$

$\boxed{7}$ Vi antar at vektorfeltet er

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da blir divergensteoremet

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \int_{\partial\Omega} f_1 e_{n1}\, dS$$

der e_{n1} er den første komponenten i e_n. Tilsvarende gjelder for f_2 og f_3, så vi kan skrive opp den generelle regelen

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \int_{\partial\Omega} u e_{nk}\, dS.$$

$\boxed{8}$ Vi kan putte uv inn i den forrige formelen, og få

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_k} + \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_k} = \int_{\partial\Omega} uv e_{nk}\, dS.$$

som kalles **delvisintegrasjonsformelen** i flere dimensjoner. Dette er en generalisering av formelen du er vant til fra skolen. Legger vi sammen for alle k, får vi

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_k} + \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_k} = \int_{\partial\Omega} uv e_{nk}\, dS.$$