4 - 12 - KRASJKURS I RESIDYREGNING

For å beregne integralet

$$\int_\Gamma e^{1/z}\,dz$$

der Γ er en glatt kurve som omslutter origo, kan vi skrive

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots$$

og integrere ledd for ledd:

$$\int_\Gamma e^{1/z}\,dz = \int_\Gamma dz + \int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz + \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{1}{z^2}\,dz + \cdots.$$

Disse integralene har vi beregnet i TMA4111 og alle blir null unntatt

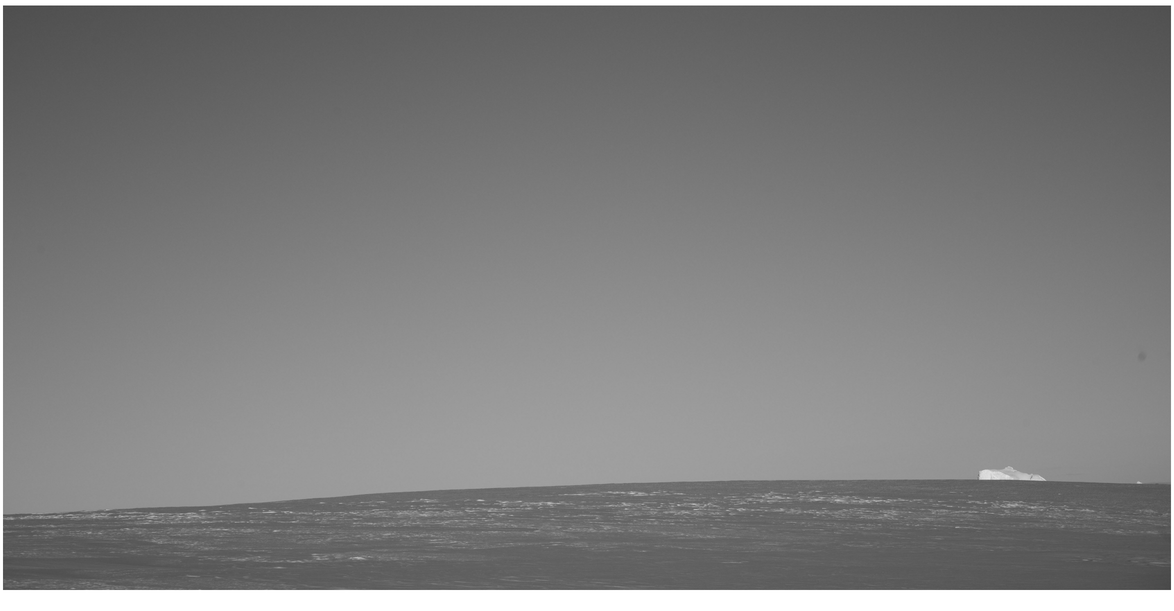
$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i,$$

slik at

$$\int_\Gamma e^{1/z}\,dz = 2\pi i.$$

Dette er en strategi som har overraskende bred gyldighet. La prøve å bruke det samme trikset på noen andre integraler. La Γ være enhetssirkelen i det komplekse planet, traversert én gang mot klokken, og beregn

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\cos z}{z}\,dz$ $\boxed{2}$ $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\cos z}{z^2}\,dz$ $\boxed{3}$ $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\sin z}{z}\,dz$ $\boxed{4}$ $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2}\,dz$



Tar vi utgangspunkt i maclaurinrekkene til sinus- og cosinusfunksjonen, får vi

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2} + \frac{z^3}{4!} - \cdots$$

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} + \frac{z^2}{4!} - \cdots$$

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$$

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots$$

og bruker vi trikset, ser vi at

$\boxed{1}\ \int_\Gamma \frac{\cos z}{z}\,dz = 2\pi i$ $\boxed{2}\ \int_\Gamma \frac{\cos z}{z^2}\,dz = 0$ $\boxed{3}\ \int_\Gamma \frac{\sin z}{z}\,dz = 0$ $\boxed{4}\ \int_\Gamma \frac{\sin z}{z^2}\,dz = 2\pi i$

Komplekse deriverbare funksjoner oppfører seg annerledes enn alt annet du har sett. og oppførselen kan oppsummeres som følger. En reell funksjon kan fint ha knekk i den fjerde, femte eller attendederiverte. For eksempel eksisterer den andrederiverte til $x^3\sin(1/x)$, men ikke den tredjederiverte. Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/(x^2-1)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

er glatt men ikke analytisk; alle de deriverte eksisterer overalt (selv i $x = \pm 1$), men det finnes ingen a slik at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \cdots$$

på et intervall som inneholder $x = 1$ eller $x = -1$. Komplekse funksjoner opplever ikke disse sjatteringene hva angår regularitet. En kompleks funksjon som er deriverbar i et punkt z_0 kan alltid skrives som en taylorrekke i en omegn rundt z_0. Det finnes ingen mellomting mellom deriverbar og analytisk, og derfor sier vi bare **analytisk** eller **holomorf**. Funksjonene i oppgavene over har singulariteter i origo, og er derfor er de ikke analytiske, men som du ser, kan man rekkeutvikle dem om singularitetene allikevel. La Γ fortsatt være enhetssirkelen, og beregn

$\boxed{5}\ \int_\Gamma \frac{\cos z^2}{z^5}\,dz$ $\boxed{6}\ \int_\Gamma \frac{\sin 2z}{z^8}\,dz$ $\boxed{7}\ \int_\Gamma e^z + e^{1/z}\,dz$ $\boxed{8}\ \int_\Gamma e^{z+1/z}\,dz$

En funksjon f sin rekkeutvikling om et singulært punkt med både positive og negative potenser av z kalles en **laurentrekke**. Summen av de negative potensene kalles **prinsipaldelen** til rekkeutviklingen. Vi bruker prinsipaldelen til å klassifisere singularitetene til f. Dersom den laveste negative potensen er $-n$, sier vi at det singulære punktet er en **pol av orden** n, så

$$\int_\Gamma \frac{\sin 2z}{z^8}\,dz = \frac{1}{z^8}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2}{z^7} - \frac{8}{z^5 3!} + \frac{32}{z^3 5!} - \cdots$$

har en pol av orden syv i origo. Dersom den negative delen har uendelig mange ledd, sier vi at f har en **essensiell singularitet**, slik som

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots$$

$\boxed{8}$ Finn prinsipaldelen til

$$f(z) = e^{z+1/z}$$

Det som nå er et faktum er at om du slår en sirkel Γ om et singulært punkt z_0 og integrerer f, er det kun koeffisienten til $1/z$ som gir bidrag til integralet så lenge det ikke er andre singulære punkter innenfor Γ. Denne koeffisientene kalles **residyet** til f i z_0 og skrives

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

si all integrasjon av komplekse funksjoner består av å få tak i denne koeffisienten og gange med $2\pi i$. Forresten trenger ikke Γ være en sirkel, for Cauchys integralteorem, som sier at

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

så lenge f er analytisk på en åpen enkeltsammenhengende mengde som inneholder Γ, impliserer at dersom du deformerer Γ litt, får integralet den samme verdien så lenge du ikke dytter inn noen andre singulariterer innenfor Γ. Dersom Γ omslutter flere singulariterer, legger du bare sammen residyene og ganger alt med $2\pi i$ - dette kalles **residyteoremet**.[1] Det finnes en formler for å beregne residyet uten å sette opp laurentrekken til f i z_0. Noen ganger er det kjappere å finne residyene på denne måten, men som oftest er det enklest å manipulere laurentrekken for hvert singulære punkt til man kan lese av residyene av fra disse.

$\boxed{9}$ Finn og klassifiser polene til

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

og

$\boxed{10}$ beregn residyene

og finn

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^2(1-z)}\,dz$$

der Γ er en glatt enkeltsammenhengende kurve som omslutter

$\boxed{11}$ både $z_0 = 1$ og $z_0 = 0$. $\boxed{12}$ $z_0 = 1$ men ikke $z_0 = 0$. $\boxed{13}$ $z_0 = 0$ men ikke $z_0 = 1$.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Residue_theorem

Den klassiske ingeniøranvendelsen av residyregning er formelen for invers laplacetransform. Dersom $x(t)$ har laplacetransform $X(s)$, er

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

og for signaler som har fourieromvending, er denne helt fin. Men hva med

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin t & t \geq 0 \end{cases} \qquad ?$$

Denne har laplaceomvending, men ikke fourieromvending. Finnes det en formel slik at

$$\sin t = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \quad ?$$

Vi kan ikke bare skrive

$$\sin t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-\omega^2}e^{i\omega t}d\omega$$

for dette integralet konvergerer ikke. La oss begynne med å skrive $y(t) = x(t)e^{-\sigma t}$, og se at

$$X(s) = X(\sigma + i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i\omega t}dt = \hat{y}(\omega)$$

Dersom vi nå velger σ slik at y kan fourieromvendes, følger det ved variabelskiftet $s = \sigma + i\omega$ at

$$x(t) = e^{\sigma t}y(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + i\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} X(s)e^{st}ds$$

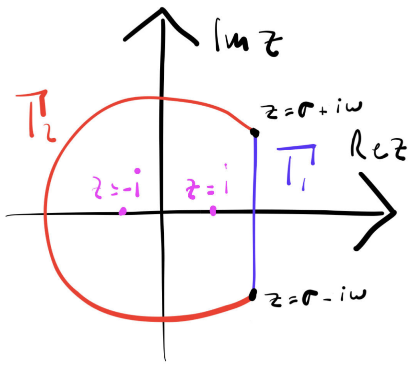
Dette integralet er ikke så godt å beregne, men her kan residyteoremet hjelpe oss. La oss se på

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin t & t \geq 0 \end{cases}$$

I følge formelen over, er

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} \frac{e^{st}}{s^2+1}ds$$

men hvis vi legger til en del av en sirkel slik at vi får en lukket kontur Γ (se figuren til høyre), kan vi bruke residyteoremet, og skrive



$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_1} \frac{e^{st}}{s^2+1}ds + \int_{\Gamma_2} \frac{e^{st}}{s^2+1}ds\right) = \sum \text{res}\frac{e^{st}}{s^2+1}$$

dersom σ er stor nok til at begge singularitetene til $1/(s^2+1)$ ligger inni Γ.

$\boxed{14}$ Vis at summen av residyene til $\frac{e^{st}}{s^2+1}$ blir $\sin t$.

$\boxed{15}$ Vis at integralet $\int_{\Gamma_2}\frac{e^{st}}{s^2+1}ds$ går mot null når $\omega \to \infty$ på grunn av eksponensialfunksjonen i nevneren.

Dersom f er analytisk i z_0, er også funksjonen

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

analytisk i z_0 siden grenseverdien

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

er i orden. Dette kan vi brukes til å utlede noe som kalles **Cauchys integralformel**.

$\boxed{16}$ Bruk Cauchys integralteorem på en enkeltsammenhengende kurve Γ som omslutter punktet z_0, og utled formelen

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Cauchys integralformel kan generaliseres til

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

men utledningen er litt mer involvert, så den dropper vi. Cauchys integralformel åpner for en alternativ oppskrift for koeffisientene til taylorrekken til f:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Høyresiden av Cauchys generaliserte integralformel gir også mening for negative n, så her har du faktisk en formel for alle leddene i laurentrekken til f.