4 - 12 - KRASJKURS I RESIDYREGNING - LF

$\boxed{5}$ Ops, vi beregner:

$$\frac{\cos z^2}{z^5} = \frac{1}{z^5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{4n}}{(2n)!} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2z} + - \cdots$$

som gir

$$\int_\Gamma \frac{\cos z^2}{z^5}\,dz = -\pi i.$$

$\boxed{6}$ Denne og, vi får

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{\sin 2z}{z^8}\,dz &= \int_\Gamma \frac{1}{z^8}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dz \\ &= \int_\Gamma \frac{2}{z^7} - \frac{8}{3!z^5} + \frac{32}{5!z^3} - \frac{128}{7!z} - \cdots\,dz = -\frac{256\pi i}{7!}.\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ Her er det kun i utviklingen til $e^{1/z}$ det dukker opp en $1/z$, så $\displaystyle\int_\Gamma e^z + e^{1/z}\,dz = 2\pi i$.

$\boxed{8}$ Denne er litt mer jobb. Det beste er kanskje å skrive det ut slik:

$$
\begin{aligned}
e^{z+1/z} =& e^z e^{1/z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} \\
=& \quad \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) \\
+& \quad \frac{1}{z}\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) \\
+& \frac{1}{2z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) \\
+& \frac{1}{3!z^3}\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) \\
+& \frac{1}{4!z^4}\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) \\
+& \cdots \\
=& 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \\
+& \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots \\
+& \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4} + \frac{z}{2 \cdot 3!} + \frac{z^2}{2 \cdot 4!} + \cdots \\
+& \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{3! \cdot 2z} + \frac{1}{3!3!} + \frac{z}{3!4!} + \cdots \\
+& \frac{1}{4!z^4} + \frac{1}{4!z^3} + \frac{1}{4!2z^2} + \frac{1}{4!3!z} + \frac{1}{4!4!} + \cdots \\
+& \cdots
\end{aligned}
$$

og nå ser vi at

$$
\int_\Gamma e^{z+1/z}\, dz = 2\pi i \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!2!} + \frac{1}{4!3!} + \cdots\right).
$$

$\boxed{8}$ Prinsipaldelen er alt som er markert i blått:

$$
\begin{aligned}
e^{z+1/z}\, dz =& e^z e^{1/z} \\
=& 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \\
+& \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots \\
+& \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4} + \frac{z}{2 \cdot 3!} + \frac{z^2}{2 \cdot 4!} + \cdots \\
+& \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{3! \cdot 2z} + \frac{1}{3!3!} + \frac{z}{3!4!} + \cdots \\
+& \frac{1}{4!z^4} + \frac{1}{4!z^3} + \frac{1}{4!2z^2} + \frac{1}{4!3!z} + \frac{1}{4!4!} + \cdots \\
+& \cdots
\end{aligned}
$$

$\boxed{9}$ Funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

har en singularitet i $z_0 = 0$ og i $z_0 = 1$. Laurentutviklingen i $z_0 = 0$ får vi ved å bruke den geometriske rekken og skrive

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + z^2 + \cdots\right)$$

og nå ser vi at $z_0 = 0$ er en pol av orden to. Laurentutviklingen i $z_0 = 1$ får vi ved å først taylorutvikle $1/z^2$ om $z_0 = 1$. Vi har

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{z^2} = (-1)^n(n+1)!\frac{1}{z^{n+2}}$$

slik at

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2} &= 1 - 2(z-1) + 3(1-z)^2 + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(z-1)^n\end{aligned}$$

og

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)z^2} = \frac{1}{1-z}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(z-1)^n\right) = \frac{-1}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(z-1)^{n-1}$$

og vi ser at $z_0 = 1$ er en pol av orden 1.

$\boxed{10}$ Disse er bare å hente ut av laurentrekkene. Vi får

$$\text{res}_{z_0=0}f(z) = \qquad \text{og} \qquad \text{res}_{z_0=1}f(z) = -1.$$

$\boxed{11}$ $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z^2(1-z)}\,dz = 2\pi i\left(\text{res}_{z_0=0}f(z) + \text{res}_{z_0=1}f(z)\right) = 0$

$\boxed{12}$ $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z^2(1-z)}\,dz = 2\pi i\,\text{res}_{z_0=1}f(z) = -2\pi i$

$\boxed{13}$ $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z^2(1-z)}\,dz = 2\pi i\,\text{res}_{z_0=0}f(z) = 2\pi i$

$\boxed{14}$ Siden

$$\frac{e^{st}}{s^2+1} = \frac{e^{st}}{(s+i)(s-i)}$$

er funksjonen er singulær i $s = \pm i$, så her er det noen poler og de må helt klart være enkle. Hvis polen er enkel ser vi av formen på laurentrekken at vi kan gange med $(s \pm i)$ og ta grenseverdien inn mot $s = \mp i$ for å få residyet:

$$\text{res}_{s_0=i}f(s) = \lim_{s\to i}(s-i)f(s) = \lim_{s\to i}\frac{e^{st}}{(s+i)} = \frac{e^{it}}{2i}$$

$$\text{res}_{s_0=-i}f(s) = \lim_{s\to -i}(s+i)f(s) = \lim_{s\to -i}\frac{e^{st}}{(s-i)} = -\frac{e^{it}}{2i}$$

Summen av disse to er helt klart $\sin t$. Denne er også enkel å ta med cauchys integralformel, som utledes i siste oppgave.

$\boxed{15}$ Denne er for vanskelig for eksamen. De av dere som trenger inversformelen for laplacetransform i avansert lineær systemteori vil antagelig bli plaget med utledningen av foreleseren i kurset.

$\boxed{16}$ Hvis f er analytisk, eksisterer grenseverdien

$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

så funksjonen

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z) & z = z_0 \end{cases}$$

er analytisk. Cauchys integralteorem gir

$$0 = \int_\Gamma g = \int_\Gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz$$

og som gir

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_\Gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0).$$