4 - 11 - SYMMETRI II

I forrige uke studerte vi bølgelikningen. Denne dukker opp så ofte at differensialoperatoren har fått sitt eget symbol:

$$\Box u = \ddot{u} - c^2 \Delta u = 0$$

Den har også fått sitt eget navn, **d'Alembert-operatoren**,[1] etter Jean le Rond d'Alembert, gutten som erta på seg Euler og Rameau.[2] D'Alembertoperatoren er en generalisering av laplaceoperatoren dersom du angriper det riktig. Dette leder oss inn på Einstein og relativitetsteorien, snudde opp ned på alt i 1905.[3] Litt grunnleggende relativitetsteori er viktig - gps hadde aldri funka uten[4] og spektroskopilinjer blir bittelitt feil om man ikke tar hensyn til spinn.[5]

$\boxed{1}$ Et elektron kjører tog mens et annet elektron står og ser på. Toget har farten v. Lorentzkraften[6] på det ene elektronet fra det andre er

$$F = q\left(E + v \times B\right).$$

Det er klart at begge partiklene omsluttes av hvert sitt elektriske felt. Men er det et magnetisk felt? Hvis ja, hvilket av dem lager det?

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/D'Alembert_operator
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Jean-Philippe_Rameau
[3] https://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/specrel/www/
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Error_analysis_for_the_Global_Positioning_System
[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Fine_structure
[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_force

I Amperes lov

$$c^2\nabla \times B = \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{J}{\epsilon_0}$$

er c lyshastigheten i vakuum. I 1905 var det naturlig å stille spørsmålet om lyshastigheten *relativt til hva?* og standardsvaret var "relativt til *eteren* naturligvis!" Alle til da kjente bølgebevegelser trengte et medium for å propagere, og bølgelikningen er så lett å utlede fra maxwells lover at det er pensum i TMA4121 å kunne gjøre det. Men ingen har noen gang sett noe til eteren, og svaret på forrige oppgave er at elektronene kan krangle om hvem av dem som lager magnetfeltet, men de kommer til å være enige om de involverte kreftene på hverandre. Tolkningen er forskjellig, men prediksjonene er identiske. Dette eksemplet var kjent for Einstein, og han fikk den sprø ideen at kanskje lyshastigheten var en fysisk konstant som ikke skulle måles relativt til noe som helst, og det viste seg at han hadde rett.[7] Han fremsatte følgende postulater:

- Fysiske lover gir samme prediksjon i forskjellige inertialsystemer.
- Lyshastigheten er den samme i alle inertialsystemer.

To inertialsystemer tenker vi på som to koordinatsystemer enten er roterte eller beveger seg med konstant rettlinjet hastighet i forhold til hverandre, eller begge deler. Et koordinatsystem festet i jordoverflaten er akselerert, og derfor opplever vi fiktive krefter (for eksempel corioliskraften) så dette er ikke et inertialsystem. Men vi later som i mange tilfeller.

$\boxed{2}$ Et foton reiser langs en rett linje fra ett punkt til et annet. Avstanden mellom punktene er s og det tar tiden t. Vis at i to forskjellige inertialsystmer må s/t være den samme.

Størrelsen ct er en fysisk lengde, og i moderne fysikk setter de opp en firedimensjonal koordinat slik:

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x_1, x_2, x_3)$$

Et punkt i dette koordinatsystemet kalles en **hendelse**, og rommet kalles **minkowskirommet**.[8] Kombinert med Einsteins summasjonskonvensjon, som sier at det er underforstått summasjon fra 1 til 3 over alle repeterte romerske indekser og fra 0 til 3 over alle repeterte greske indekser, blir det fort litt krøkkete å lese om man ikke er vant til det, så vi skal holde oss til (ct, x_1, x_2, x_3).

[7] Du kan lese hans originale artikkel i engelsk oversettelse her:
https://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/specrel/www/

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_space

Newtons lover slik du lærte dem på skolen mister sin prediktive kraft ved høye hastigheter, mens Maxwells lover ikke gjør ikke det. Dette syntes selvfølgelig alle var forvirrende for hundre år siden. Det som tar tid å venne seg til er at det er lyshastigheten og ikke tidens gang ikke er konstant. For to hendelser adskilt av at et foton reiser fra et sted til et annet, er

$$c = \frac{|x|}{t} = \text{konstant}$$

slik du utledet i oppgave 2. Denne likningen skrives om til

$$c^2t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$$

og venstre side kalles **minkowskiproduktet**.[9] Det at c skal være den samme i alle inertialsystemer, fører til at tid strekkes og lengde (i fartsretningen) komprimeres, begge med faktoren

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

der v er den relative hastigheten mellom inertialsystemene og $\beta = v/c$. Nå er det vanlig praksis å begynne å lete etter alle transformasjoner i tid og rom som ikke endrer på minkowskiproduktet, for disse transformasjonene vil automatisk respektere Einsteins postulater. Det finnes tre typer koordinattransformasjoner som ikke endrer avstanden mellom hendelser, og disse kalles **poincarégruppen**.[10]

$\boxed{3}$ Den ene typen er de vanlige rotasjonene i $\mathbb{R}^3$. Vis dette.

Den andre typen er translasjon av koordinatsystemet, altså "flytte origo". Denne er ikke så matematisk interessant, og rotasjoner har vi allerede studert, så la oss gå videre til den siste, nemlig **lorentzboost**.[11] **Lorentzgruppen**[12] er den undergruppen av poincarégruppen som kun består av rotasjoner og boosts. En nyttig matrise er

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

og vi bruker $\Lambda \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ for lorentztransformasjoner.

$\boxed{4}$ Vis at et medlem av lorentzgruppen må tilfredsstille $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, og vis at mengden av alle Λ må være en gruppe.

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudo-Euclidean_space

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Poincaré_group

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_transformation

[12] Jeg tipper det heter "boost" fordi du på en måte plutselig hopper over i et annet koordinatsystem som reiser med farten v relativt til det koordinatsystemet du var vant til fra før:
https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_group

Lorentztransformasjonene Λ har overraskende mange likhetstrekk med rotasjoner i $\mathbb{R}^3$. I økt 4-7 gikk vi veien via Rodrigues' formel for å finne ut hva generatoren til en rotasjon er. Nå skal vi gå motsatt vei og utlede formelen for en generell lorentzboost fra noe som vi lett ser at må være generatoren til en infinitesimal lorentzboost i enhetsretningen v:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{5}$ Vis at

$$\Lambda = e^{\lambda K} = I + K \sinh(\lambda) + K^2(\cosh(\lambda) - 1)$$

og at denne ikke endrer minkowskiproduktet.

Skalaren λ kalles **rapiditeten**, og vi kan finne ut mer om den ved å gå tilbake til fysikkboken fra videregående.

$\boxed{6}$ La $v = e_1$ eller noe tilsvarende enkelt og husk på lorentzkontraksjonen og tidsdilatasjonen du lærte om på gymnaset og utled at

$$\cosh \lambda = \gamma \qquad\qquad \sinh \lambda = \gamma\beta$$

Nå er det mulig å vise at rotasjon i rom og lorentzboost er de eneste lineæroperatorene som bevarer minkowskiproduktet dersom du ser bort fra translasjon, men dette er litt for hardt for oss. Rapiditeten λ er analog til θ i rotasjoner, og er additiv på samme måte.

$\boxed{7}$ Vis at $\Lambda(\lambda_1 + \lambda_2) = \Lambda(\lambda_1)\Lambda(\lambda_2)$

Lorentzgruppen er en generalisert rotasjon i tid og rom, mens dalembertoperatoren kan tolkes som en generalisert laplaceoperator. Nå kan vi vise at dalembertoperatoren får den samme verdien før og etter man har bytta koordinatsystem med et element i lorentzgruppen, akkurat som vi gjorde med laplaceoperatoren og vanlige rotasjoner.

$\boxed{8}$ Vis.