4 - 11 - SYMMETRI II

$\boxed{1}$ Ja, ladning i bevegelse induserer magnetfelt. Hvis du husker høyrehåndsregelen du lærte på skolen, vil du se at det spiller ingen rolle om du ser på det ene eller det andre elektronet som stasjonært - kreftene blir de samme.

$\boxed{2}$ Hvis fotonet reiser med konstant fart i en rett linje er farten gitt ved $c = st$, uansett hva slags inertialsystem det er snakk om, og Einstein sier altså at det er c og ikke t som skal være den samme i hvert inertialsystem. La oss si at distansene heter s_1 og s_2 mens tidene er t_1 og t_2. Da får vi

$$\frac{s_1}{t_1} = c = \frac{s_2}{t_2}.$$

Hvis du ikke tror på at fotonets trajektorie er en rett linje i begge inertialsystemer, er det bare å sette opp parametrisering for trajektoriene i begge systemer og dobbeltsjekke.

$\boxed{3}$ Lett! En rotasjon R endrer ikke $|x|$ siden determinanten til R er 1, og da endrer ikke R minkowskiproduktet heller.

$\boxed{4}$ Minkowskiproduktet er gitt ved

$$(ct, x_1, x_2, x_3)\eta \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

og vi må ha at

$$(ct, x_1, x_2, x_3)\eta \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (ct, x_1, x_2, x_3)\Lambda^T \eta \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

for alle hendelser (ct, x_1, x_2, x_3) som kun er sant dersom $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$. For å se at disse danner en gruppe, må vi sjekke at det finnes invers og enhet og at mengden av alle Λ er lukket under matrisemultiplikasjon. Enhet er enkelt, siden $\eta = I^T \eta I$. Tar vi determinanten til $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$, får vi $\det \eta = \det \Lambda^T \det \eta \det \Lambda$, slik at

$$1 = (\det \Lambda)^2$$

som viser at Λ er inverterbar, og

$$I = \eta \Lambda^T \eta \Lambda$$

gir at

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta$$

og denne er en lorentztransformasjon siden

$$\eta = \left(\Lambda^{-1}\right)^T \eta \Lambda^T$$

som er en omskriving av $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$. Mengden av alle Λ er lukket under matrisemultiplikasjon siden

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \Lambda_1^T \eta \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \eta \Lambda_2 = \eta.$$

$\boxed{5}$ Vi beregner først

$$K^2 = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 v_1 & v_2 v_1 & v_3 v_1 \\ 0 & v_1 v_2 & v_2 v_2 & v_3 v_2 \\ 0 & v_1 v_3 & v_2 v_3 & v_3 v_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & vv^T \end{pmatrix}$$

og

$$K^3 = \lambda \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K$$

slik at $K^4 = K^2$ og $K^5 = K^3$ og så videre. Dette gjør det enkelt å summere opp eksponensialfunksjonen:

$$\begin{aligned} e^{\lambda K} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n K^n}{n!} \\ &= I + K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} + K^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \\ &= I + K \sinh(\lambda) + K^2 (\cosh(\lambda) - 1) \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ La oss sette $v = e_1$, slik at

$$K = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og

$$K^2 = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & vv^T \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{aligned} e^{\lambda K} &= I + K \sinh(\lambda) + K^2 (\cosh(\lambda) - 1) \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\lambda & \sinh\lambda & 0 & 0 \\ \sinh\lambda & \cosh\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hvis du husker tilbake til gymnaset eller slår opp i en tilfeldig elementær fysikkbok eller i Einsteins originale artikkel fra 1905, vil du se at tidsdilatasjon og lengdekontraksjon er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

alt etter om hvilken vei du går mellom koordinatsystemene, så da setter vi

$$\cosh\lambda = \gamma \qquad\qquad \sinh\lambda = \gamma\beta$$

og så regulerer vi bare retningen på farten med fortegnet på γ.

$\boxed{7}$ Siden $K(\lambda_1)$ og $K(\lambda_2)$ åpenbartkommuterer, kan vi enkelt og greit regne ut at

$$\Lambda(\lambda_1 + \lambda_2) = e^{K(\lambda_1+\lambda_2)} = e^{K(\lambda_1)+K(\lambda_2)} = e^{K(\lambda_1)}e^{K(\lambda_2)} = \Lambda(\lambda_1)\Lambda(\lambda_2)$$

$\boxed{8}$ La oss nå slik som Einstein sette $t = x_0$ bare for å forenkle notasjonen litt. Inspirert av siste oppgave i 4-6, setter vi

$$D_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} \\ c\frac{\partial}{\partial x_1} \\ c\frac{\partial}{\partial x_2} \\ c\frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

slik at

$$\Box_x = D_x^T \eta D_x.$$

Setter vi $y = \Lambda x$, får vi (fra kjerneregelen)

$$D_x^T = D_y^T \Lambda$$

og (fra matrisetransposisjon av forrige likning)

$$D_x = \Lambda^T D_y.$$

Siden en ren boost er generert av en symmetrisk matrise, er Λ symmetrisk om den er en ren boost, slik at

$$\Box_x = D_x^T \eta D_x = D_y^T \Lambda \eta \Lambda^T D_y = D_y^T \Lambda^T \eta \Lambda D_y = D_y^T \eta D_y = \Box_y.$$

Dersom Λ er en ren rotasjon, endres ikke laplaceoperatoren, så da endres ikke dalembertoperatoren heller. For å se at dalembertoperatoren ikke endres av en generell lorentztransformasjon, må vi nå strengt tatt vite at et element i lorentzgruppen alltid kan skrives som et produkt av en boost og en rotasjon, og det er litt for hardt for oss. Men det er sant.