4 - 10 - BØLGER

For to uker siden utledet vi varmelikningen ved å kombinere kontinuitetslikningen

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

med Ficks lov for diffusjon

$$J = \rho v = -D\nabla\rho$$

der $J = \rho v$ er flukstettheten og D er diffusjonskonstanten. I forrige uke fikk vi transportlikningen ved å kombinere kontinuitetslikningen med forskjellige enkle antagelser på hastighetsfeltet v. I denne uken skal vi kombinere kontinuitetslikningen med Newtons andre lov for å utlede bølgelikningen[1]

$$\ddot{p} = \Delta p$$

for overtrykket i en lydbølge i luft. Det er vanlig å sette

$$p_{\text{faktisk trykk}} = p_0 + p_{\text{overtrykk}}$$

og så er det altså $p_{\text{overtrykk}}$ vi er interesserte i, men det blir klønete å skrive $p_{\text{overtrykk}}$ overalt, så la oss sette

$$p_{\text{faktisk trykk}} = p_0 + p.$$

Vi gjør det sammen med tettheten:

$$\rho_{\text{faktisk tetthet}} = \rho_0 + \rho.$$

Dersom hverken p eller ρ fluktuerer veldig mye fra henholdsvis p_0 eller ρ_0, kan vi anta at p og ρ er proporsjonale. Dette kan argumenteres for på flere måter, for eksempel ved å anta den adiabatiske gasslov[2]

$$p_{\text{faktisk trykk}} = c\rho^\gamma$$

der γ er $5/3$ for enatomige gasser og $7/5$ for toatomige gasser og så videre.

$\boxed{1}$ Du lurer sikkert på hva c er, men det er ikke så nøye, for den skal vi bli kvitt. Utled at

$$1 + \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

og bruk linearisering til å utlede at

$$p \approx \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\rho.$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Adiabatic_process

Nå er det slik at i vanlig lydpropagasjon er både overtrykket p og overtettheten ρ er ekstremt små. For en typisk støvsuger er disse seks til syv størrelsesordener under referansetrykk og referansetetthet. Det samme gjelder for farten v - denne er bitte liten, for luftmolekylene beveger seg ikke særlig langt når lydbølgene får dem til å danse frem og tilbake.

$\boxed{2}$ Sett inn $\rho + \rho_0$ i kontinuitetslikningen og utled at

$$\dot{\rho} + \rho_0 \nabla \cdot v \approx 0.$$

I fluiduken utledet vi likningen

$$\dot{v} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{\nabla p_{\text{faktisk trykk}}}{\rho_{\text{faktisk tetthet}}} - g e_3$$

øverst på side 2, og der jeg har satt inn denne ukens notasjon for trykk og tetthet. Neglisjerer vi tyngden (denne er allerede tatt høyde for i referansetrykket og bidrar ikke i lydpropagasjonen) får vi

$$\dot{v} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{\nabla p_{\text{faktisk trykk}}}{\rho_{\text{faktisk tetthet}}}.$$

$\boxed{3}$ Bruker du de samme triksene som i forrige oppgave, bør det være mulig å hoste opp at

$$\dot{v} \approx -\frac{\nabla p}{\rho_0}.$$

Til slutt kan vi sette proporsjonaliteten mellom p og ρ inn i kontinuitetslikningen og derivere med hensyn på tid og få

$$\ddot{p} = -\gamma p_0 \nabla \cdot \dot{v}$$

$\boxed{4}$ og da har vi alle ingrediensene til bølgelikningen for akustiske bølger:[3]

$$\ddot{p} = c^2 \Delta p$$

der $c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ er propagasjonsfarten.

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Acoustic_wave_equation

Vi skal avslutte denne firesemesters torturen med å sammenfatte litt om dette med tid og rom. Derfor er det lurt å nå løse bølgelikningen på hele $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$. Dette ble først gjort av Poisson, men av en eller annen grunn kalles løsningen **Kirchhoffs formel**:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B(x,ct)} f\, dS\right) + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B(x,ct)} g\, dS$$

Her er f og g initialkravene, og $B(x,t)$ en kule med radius t, sentrert i x. For å utlede Kirchhoffs formel, må vi gjøre noen andre småting først. Hvis man ikke ønsker å bruke bølgelikningen til å beskrive en oppspent streng, men heller bølgene fra et steinkast på et endimensjonalt og uendelig langt hav, må vi lete etter en funksjon $u : \mathbb{R} \times [0, \infty)$ som tilfredsstiller bare bølgelikningen med de vanlige initialkravene, men med ingen randkrav. La oss begynne med å "løse" bølgelikningen uten noen former for rand- eller initialkrav.

$\boxed{5}$ Sjekk at

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

passer i likningen

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 \Delta u(x,t).$$

uansett hva ϕ og ψ er, så lenge de er to ganger kontinuerlig deriverbare.

Hva er en bølge egentlig? Oppgaven over forteller i bunn og grunn mye om det. Man kan tenke på det som en eller annen profil som flytter seg bortover. Oppgaven over forteller oss at bølgelikningen ikke bryr seg så mye om formen på profilen, den er fornøyd så lenge profilen siger bortetter med farten c, altså at løsningen kun er avhengig av $x+ct$ eller $x-ct$. Dersom du har en bestemt profil gitt av initialkrav, kan vi komme et steg videre.

$\boxed{6}$ Bruk

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{og} \qquad \dot{u}(x,0) = g(x),$$

til å sette opp et 2×2-likningssystem for ϕ og ψ. Gausseliminer og integrer og vis at

bølgeligningen på hele x-aksen, med initialkrav

$$u(x,0) = f(x) \qquad \dot{u}(x,0) = g(x),$$

løses av

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(t)\, dt.$$

Så er det en ting til vi må gjøre, nemlig anta at vi har en uendelig lang streng festa i veggen. Dette kalles **halvlinjeproblemet** og består av den endimensjonale bølgelikningen pluss følgende rand- og initialkrav:

$$u(0,t) = 0 \qquad u(x,0) = f(x) \qquad \dot{u}(x,0) = g(x) \qquad f(0) = g(0) = 0$$

Måten man løser det på er i bunn og grunn enkel, man utvider f og g til odde funksjoner på hele $\mathbb{R}$ og så stapper man alt inn i d'Alemberts formel. Dette virker litt corny i begynnelsen, men er en naturlig ide om man har sett på hvordan en bølge reflekteres fra festet punkt:
`https://www.youtube.com/watch?v=1PsGZq5sLrw`

$\boxed{7}$ Vis at vi får

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct) + \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g\right) & 0 \le ct \le x \\ \frac{1}{2}\left(f(x+ct) - f(ct-x) + \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{ct-x}^{x+ct} g\right) & 0 \le x \le ct \end{cases}$$

La oss nå bestemme oss for et punkt x og slå en kule $B(x,r)$ rundt. Det neste steget er å studere gjennomsnittet til u på $\partial B(x,r)$:

$$\bar{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u \, dS.$$

$\boxed{8}$ Vis at

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{u} = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\bar{u} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\bar{u}\right).$$

(Hint: Deriver $\bar{u}$ to ganger og sett sammen høyresiden og bruk bølgelikningen.)

Nå er det faktisk slik at $U = r\bar{u}$ tilfredstiller halvlinjeproblemet

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \qquad U(0,t) = 0 \qquad U(r,0) = F(r) \qquad \dot{U}(x,0) = G(r) \qquad F(0) = F(0) = 0$$

der

$$F(r) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial B(x,r)} f \, dS \qquad \text{og} \qquad G(r) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial B(x,r)} g \, dS.$$

$\boxed{9}$ Vis dette og utled at

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B(x,ct)} f \, dS \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B(x,ct)} g \, dS.$$

(Hint: Bruk oppgave 7.)

Denne formelen er interessant fordi den forteller oss noe om hvordan bølger oppfører seg i tre dimensjoner - verdien $u(x,t)$ avhenger kun av f og g på randen av $B(x,ct)$. Dette kalles **Huygens' prinsipp**.[4] La oss si at du står i punktet x og så står det en fyr i origo og klapper et enkelt klapp ved tiden $t = 0$.

$\boxed{10}$ Når hører du klappet?

I to dimensjoner ser Kirchhoffs formel slik ut:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi c} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{B(x,ct)} \frac{f(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \, dy + \int_{B(x,ct)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} \, dy \right)$$

og hvis du gjør det samme eksperimentet som i oppgave 10, for eksempel ved å kaste en stein i havet, vil initialkravet fortsette å påvirke u også etter at bølgefronten har passert. Vi sier derfor at Huygens' prinsipp kun gjelder når antall dimensjoner er odde, dette var det Jacques Hadamard som oppdaget.

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Huygens-Fresnel_principle