4 - 1 - VEKTORKALKULUS I

Dette kurset skal handle om de store partielle differensiallikningsmodellene i fysikk. Før vi går løs på disse, skal jeg tale om notasjon. Hvordan man noterer ting kan ha ganske mye å si for hvor lett det er å håndtere. Du kan for eksempel prøve å dele 376 på 8 i romerske numeraler:

$$\frac{\text{CCCLXXVI}}{\text{VII}} = \text{XLVII}$$

Kanskje ikke så rart romerne ikke gjorde stort av seg som matematikere. Vel vel. Når vi skriver

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

er det underforstått at x_1, x_2 og x_3 er koordinatene til punktet x i standardbasisen i $\mathbb{R}^3$. Denne notasjonen er fantatisk - det er mye lettere å lese formlene

$$\beta_1 = \frac{x^T y - n\bar{x}\bar{y}}{|x|^2 - n\left(\bar{x}\right)^2} \qquad\qquad \beta_0 = \overline{y} - \beta_1 \overline{x}$$

enn

$$\beta_1 = \frac{\sum_{k=1}^n x_n y_n - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n x_n\right)\left(\sum_{k=1}^n y_n\right)}{\sum_{k=1}^n x_n^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n x_n\right)^2} \qquad\qquad \beta_0 = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n y_n - \beta_1 \sum_{k=1}^n x_n\right).$$

Men det finnes alternativer. På gymnaset skrev du

$$(x_1, x_2, x_3)$$

siden matriseregning ikke var pensum, og i gamle dager skrev vi

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

antagelig fordi multiplikasjonstabellen for kryssproduktet mellom $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ er den samme som multiplikasjonstabellen for de imaginære kvaternionene i, j og k. I en avansert bok om lineæralgebra eller differensiallikninger skriver man gjerne

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

og det finnes faktisk en ISO-standard (ISO 80000-2) som påstår at vi skal skrive det slik:

$$x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

Nå kan man diskutere om sistnevnte notasjonen er god og om det er fornuftig å ha en ISO-standard for standardbasisen i $\mathbb{R}^3$, men noen har tenkt at det var lurt. Ikke vet jeg.

$\boxed{1}$ Regn ut kryssproduktet mellom $(1, 2, 3)$ og $(4, 5, 6)$ så fort som overhodet mulig.

I fysikklitteratur er det to andre basiser for $\mathbb{R}$ som dukker opp, nemlig

$$\textbf{sylinderkoordinatbasisen} \quad \{\hat{s}, \hat{\theta}, \hat{z}\} \quad \text{og}$$
$$\textbf{kulekoordinatbasisen} \quad \{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\}.$$

Disse basisvektorene peker i bestemte retninger knyttet til radiene og vinklene i de sylinder- og kulekoordinatsystemene, og de kan være litt forvirrende i starten siden basisvektorene endres etter hvor i $\mathbb{R}^3$ man befinner seg - sjekk figurene her (og husk at fysikere og matematikere har motsatt konvensjon på hva som er θ og φ i kulekoordinater):
`https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates`
Det finnes også mer avanserte koordinatsystemer, men de får ikke vi bruk for.[1]

$\boxed{2}$ Sett opp eksplisitte uttrykk for basiselementene i kule- og sylinderkoordinatbasisene. (Hint: Vi kan noen triks fra TMA4111 som gjør det nesten trivielt. Bruk jacobimatrisene til kule- og og sylinderkoordinattransformasjonene.)

I dette kurset skal vi bruke e med en subskript for å indikere forskjellige enhetsvektorer:

e_k : Standardbasiselement k i $\mathbb{R}^3$.

e_φ : Rett sør på en kuleflate sentert i origo.

e_θ : Rett øst på samme kuleflate.

e_r : Radielt ut fra origo; retningen avhenger av θ og φ.

e_s : Normalt ut fra e_3; retningen avhenger av θ.

e_n : Normalvektor til en flate, utnormal om flaten er lukket.

$\boxed{3}$ Fordelen med disse alternative basisene er at noen ting blir lettere å skrive opp. Skriv opp coloumbfeltet

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{|x|^3}$$

i kulekoordinatbasisen.

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_coordinate_system`

Så er det dette med derivasjon. I TMA4111 brukte vi den gode gamle derivasjonsapostrofen:

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Dette var for å drive gjennom at mange formler du lærte på skolen, for eksempel kjerneregelen

$$h'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

eller ettpunktsformelen for tangenter

$$p(s) = f(x) + f'(x)(s - x)$$

generaliserer til funksjoner fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$ dersom du kan matrisemultiplikasjon. I faglitteratur er det vanlig å bruke **gradientoperatoren** eller **nablaoperatoren**:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = e_1\frac{\partial}{\partial x_1} + e_2\frac{\partial}{\partial x_2} + e_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

Gradienten til skalarfeltet $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skrives

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = e_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + e_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + e_3\frac{\partial f}{\partial x_3}$$

og tar vi gradientoperatoren på $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mener vi jacobimatrisen

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \nabla f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Fordelen med nablaoperatoren er at den kan settes sammen med prikk- og kryssproduktet.

$\boxed{4}$ La f være en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$. Hva blir $\nabla \cdot f$ og $\nabla \times f$?

Divergensen[2] til et vektorfelt er sporet[3] til vektorfeltets jacobimatrise:

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

Denne forteller oss noe om vektorfeltets ekspansjon i punktet x. **Rotasjonen**[4] til et vektorfelt er litt vanskeligere å tolke, og litt mer grisete enn divergensen:

$$\nabla \times f = \left(e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \times (e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

I dette kurset skal vi bli bedre kjent med disse. Finn ∇f, $\nabla \cdot f$ og $\nabla \times f$ når $f(x)$ er

$\boxed{5}$ $(x_1, x_2, x_3)^T$. $\boxed{6}$ den laminære vannstrømmen $(x_3, 0, 0)^T$. $\boxed{7}$ coloumbfeltet.

$\boxed{8}$ en roterende skive i x_1x_2-planet, for eksempel slipeskiven på en vinkelsliper eller sagbladet på en sirkelsag eller noe annet som roterer med konstant vinkelhastighet ω.

I de store fysikkmodellene dukker det gjerne opp kombinasjoner av gradient, divergens og rotasjon. La $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Regn ut:

$\boxed{9}$ $\nabla \cdot (\nabla f)$ $\boxed{10}$ $\nabla \times (\nabla f)$ $\boxed{11}$ $\nabla(\nabla \cdot g)$ $\boxed{12}$ $\nabla \cdot (\nabla \times g)$ $\boxed{13}$ $\nabla \times (\nabla \times g)$

Den første av disse kjenner du fra før, nemlig **laplaceoperatoren**:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

$\boxed{14}$ Finn $\nabla \cdot (\nabla f)$ når $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Trace_(linear_algebra)
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics)