TMA4101/4106/4111/4121

4 - 1 - VEKTORKALKULUS I

$\boxed{1}$ Melina kjefta på meg for å regne ut kryssproduktet på en teit måte i forelesning. Men jeg slipper i hvertfall å tenke. Da kan holde ut med mye. Husk å puste med nesen - det er bra for blodtrykket:
`https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC11178300/`

$\boxed{2}$ For sylinderkoordinater er jacobimatrisen gitt ved

$$|g'(s,\theta,z)| = \begin{pmatrix} \cos\theta & -s\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & s\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den første og siste kolonnen er allerede korrekt normaliserte, mens for den i midten er det bare å dele ut s. Basisen er altså

$$\begin{pmatrix} e_s & e_\theta & e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

For kulekoordinater har vi

$$g'\,(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

så kulekoordinatbasisen blir

$$\begin{pmatrix} e_r & e_\theta & e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta & \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ Dette blir pent og likner mer på den varianten du lærte på gymnaset:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e_r}{r^2}$$

$\boxed{5}$ Jacobimatrisen blir identitetsmatrisen, divergensen blir tre og rotasjonen null.

$\boxed{7}$ Jacobimatrisen til coloumbfeltet var det siste vi beregna i 4111, se økt 3-12. Både divergensen og curlen blir null. Hm. Siste ord er ikke helt sagt her, vent i spenning til økt 3-5.

$\boxed{8}$ Denne er litt morsom. Dersom skiven er sentrert i origo og har rotasjonshastigheten ω gitt i radianer per sekund, er hastighetsvektoren i punktet med koordinater $(s,\theta,0)$ gitt ved

$$\begin{aligned} v &= r\omega e_\theta \\ &= r\omega(-e_1\sin\theta + e_2\cos\theta) \\ &= \omega(-e_1x_2 + e_2x_1) = \omega\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Divergensen til denne er null, men rotasjonen er $2e_3\omega$. Jeg vet ikke om det finnes noe godt norsk ord for størrelsen $\frac{1}{2}\nabla \times f$, men på engelsk kalles denne "rotation", mens det vi kaller "rotasjon" kaller de "curl".

$\boxed{10}$ Denne blir null.

$\boxed{12}$ Også null.

$\boxed{13}$ rotasjonen til f er

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

og tar vi dobbelrotasjonen, får vi

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \\
&= \qquad \nabla(\nabla \cdot f) \qquad - \qquad \Delta f
\end{aligned}$$

Her har jeg slurva litt med dette med rad- og kolonnevektor, men dette er ikke så viktig i dette semesteret, og resultatet hadde blitt mer kløgnete å skrive opp og tyngre å lese om jeg skulle insistert på å skrive alt liggende.

$\boxed{14}$ Litt teit oppgave dette her kanskje, men jeg ville drive gjennom at om f er et vektorfelt, er det underforstått at vi kjører komponentvis slik:

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix}$$

Dette får vi nemlig bruk for i fluidmekanikk og elmag om noen uker.