4 - 0 - ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM III

Til nå i dette kurset har jeg vært nøye på å bruke den gode gamle derivasjonsapostrofen:

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Dette er for å drive gjennom at mange formler du lærte på skolen, for eksempel kjerneregelen

$$h'(x) = g'(f(x))\, f'(x)\,.$$

eller ettpunktsformelen for tangenter

$$p(s) = f(x) + f'(x)(s - x)$$

generaliserer til funksjoner fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$ dersom du erstatter vanlig multiplikasjon med matrisemultiplikasjon. I denne økten skal vi gå over til standardnotasjonen i fysikk, slik at dere venner dere til det. I klassisk fysikk er det som regel fire uavhengige variable - tre romkoordinater $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ og tiden t. En vanlig notasjon for den deriverte med hensyn på rom er, er **gradientoperatoren**:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

Vi bruker denne til tre forskjellige ting. Gradienten til skalarfeltet $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skrives

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right).$$

De to andre tingene vi bruker gradientoperatoren til er relatert til vektorfelt.

$\boxed{1}$ La f være en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$. Skriv ut komponentene til $\nabla \cdot f$ og $\nabla \times f$.

Divergensen til et vektorfelt er summen av diagonalelementene i vektorfeltets jacobimatrise:

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

Akkurat som i to dimensjoner, forteller denne noe oss om vektorfeltets ekspansjon i punktet x.

$\boxed{2}$ Finn divergensen til vektorfeltet $f(x) = (10x_1x_2^2, -5x_2x_3^2, 9x_3x_1^2)$.

La oss få mer magefølelse på divergensen med følgende oppgave.

$\boxed{3}$ La Σ_ϵ være kuleflaten med sentrum i origo og radius ϵ, og la vektorfeltet f være gitt ved $f(x) = (x_1, x_2, 0)$. La N være enhetsnormalen til Σ_ϵ som peker utover. Bestem grenseverdien

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \iint_{\Sigma_\epsilon} f \cdot N \, dS.$$

$\boxed{4}$ Finn divergensen til det elektriske feltet til en punktladning.

Analysens fundamentalteorem kommer i en tredimensjonal variant som er analog til den andre versjonen av Greens teorem. La $\Omega \in \mathbb{R}^3$ og anta $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er glatt og alt det der, da er

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot f = \iint_{\partial\Omega} f \cdot dS$$

som sier at f sin netto utstrømning fra Ω skal være lik f sin ekspansjon inne på Ω. La oss ta noen klassikere fra TMA4105.

$\boxed{5}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av paraboloidene $x_3 = x_1^2 + (x_2+1)^2$ og $x_3 = 10 - x_1^2 - (x_2 - 1)^2$, og la Γ betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene. La vektorfeltet $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $f(x) = (x_1 + x_2, x_2 - x_1, x_1^2 + x_2^2)$. Regn ut

$$\iint_{\partial T} f \cdot dS,$$

der ∂T er randen til T og enhetsnormalen N peker ut fra T.

$\boxed{6}$ La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av flatene $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 7}$, $x_3 = 0$ og $x_3 = 2$. La vektorfeltet $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$f(x) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2, x_3 + 1).$$

Hva er fluksen ut av den krumme delen til randen til T?

Rotasjonen til et vektorfelt er litt mer grisete enn divergensen:

$$\begin{aligned}\nabla \times f &= \left(i\frac{\partial}{\partial x_1} + j\frac{\partial}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_3}\right)(if_1 + jf_2 + kf_3)\\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ Finn rotasjonen til vektorfeltet $f(x) = (10x_1x_2^2, -5x_2x_3^2, 9x_3x_1^2)$.

$\boxed{8}$ La $\mathcal{C}_\epsilon$ være sirkelen $x_1^2 + x_2^2 = \epsilon^2$, orientert mot klokken, og la vektorfeltet $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved $f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Bestem grenseverdien

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} f \cdot ds.$$

$\boxed{9}$ Finn rotasjonen til coulombkraften til en ladning q.

Den første varianten av Greens teorem generaliseres til noe som kalles **Stokes teorem**. La Σ være en flate i rommet, med randkurve $\partial\Sigma$, og f er glatt og så videre:

$$\int_{\partial\Sigma} f \cdot ds = \iint_{\Sigma} \nabla \times f \cdot dS$$

Dette er også en generalisering av analysens fundamentalteorem, og sier at arbeidet f gjør på en partikkel som reiser rundt $\partial\Sigma$ er det samme som fluksen til rotasjonen til f gjennom Σ.

$\boxed{10}$ La $\Omega \in \mathbb{R}^3$ være begrenset av paraboloidene $x_3 = x_1^2 + (x_2+1)^2$ og $x_3 = 10 - x_1^2 - (x_2 - 1)^2$. La Γ betegne skjæringskurven mellom dem og la $f(x) = (x_1 + x_2, x_2 - x_1, x_1^2 + x_2^2)^T$. Regn ut

$$\int_\Gamma f \cdot ds$$

der Γ er orientert mot klokken sett ovenfra.

$\boxed{11}$ La Ω være den delen av ellipsoiden $x_1^2 + x_2^2 + 8(x_3 - 1)^2 = 9$ hvor $x_3 \geq 0$, og la vektorfeltet $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$f(x) = \left(x_1x_3 - 5x_2^3\cos x_3, 5x_1^3e^{x_3}, 6x_1x_2e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)$$

Regn ut

$$\iint_R \nabla \times f \cdot dS.$$