TMA4101/4106/4111/4121

# 3 - 9 - LINJEINTEGRALER II

Studiet av funksjoner fra $\mathbb{C}$ til $\mathbb{C}$ kalles **kompleks analyse**. Dette brukes i matematisk fysikk, men anvendelsene er avanserte, så det er ikke trivielt å motivere.[1] [2] [3] Skal du drive med lineær reguleringsteknikk eller avansert kvantefysikk kommer du til å trenge det. Vi skriver

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

der $z = x + yi$ er en uavhengig kompleks variabel og $u$ og $v$ er funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$. Visualiseringsteknikkene er i samme gate som for koordinatavbildninger.

$\boxed{1}$ La $\Omega$ være en kvart sirkelskive med radius 2 i første kvadrant. Hvordan ser $f(\Omega)$ ut dersom

$$f(z) = z? \qquad f(z) = z^2? \qquad f(z) = 1/z?$$

En funksjon som hadde litt praktisk nytte tidlig i luftfartens historie var Joukowskys Aerofoil:

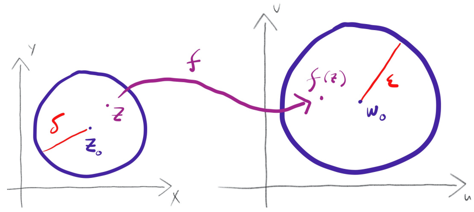
$$f(z) = z + 1/z$$

Bildet av forskjellige sirkler under denne avbildningen ser omtrent ut som tverrsnittet av en flyvinge, og du kan faktisk estimere løftet med penn og papir hvis du er god i kompleks analyse.[4]

$\boxed{2}$ Hvis du leser litt om denne og så sammenfatter alt som er gjort i oppgave 15 i økt 3-1 samt oppgave 11 og 12 i forrige økt, skjønner du kanskje hvorfor.


[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_field_theory
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Conformal_field_theory
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Casimir_effect
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Joukowsky_transform

Jeg sa at visualisering av funksjoner fra $\mathbb{C}$ til $\mathbb{C}$ er i samme gata som for koordinatavbildninger, men komplekse funksjoner oppfører seg fundamentalt annerledes enn reelle funksjoner, og dette medfører at det finnes noen ekstra triks. La oss oppsummere litt. Vi sier at




$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - w_0| < \epsilon$$

og vi sier videre at $f$ er deriverbar i $z$ dersom

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

eksisterer. På eksamen i TMA4106 hostet du kanskje opp cauchyriemannlikningene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

og i oppgave 15 i økt 3-1 viste du at under antagelsen om videre deriverbarhet er både $u$ og $v$ er harmoniske funksjoner:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

noe forsåvidt er sant uten antagelser om videre deriverbarhet, men det er for vanskelig for oss å bevise. Nå ser vi hvorfor komplekse funksjoner er nyttige i fysikk - modeller for enkel væskeflyt, stasjonær varmeledning, strukne membraner og elektrostatikk involverer nemlig harmoniske funksjoner. Det jeg fisker etter i oppgave 2 er at dersom en væskeflyt er både divergens- og sirkulasjonsfri, kan den modelleres ved noe som kalles **potensialflyt**.[5] Da nyttiggjør man seg følgende triks.

$\boxed{3}$ Real- og imaginærdelen til en kompleks deriverbar funksjon er ikke bare harmoniske funksjoner. Vis at nivåkurvene til den ene står ortogonalt på nivåkurvene til den andre.

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Potential_flow

For hundre år siden var komplekse funksjoner uunværlige i praktisk modellering av væskeflyt, stasjonær varmeledning og elektrostatikk, og nå for tiden er de uunværlige i avansert kvantefysikk, men disse anvendelsene er i tidligste laget for oss gå løs på. Forhåpentligvis skjønner du nå at komplekse funksjoner kan brukes til noe. La oss finne ut mer om hvordan de oppfører seg.

$\boxed{4}$ Finn real- og imaginærdelene til $f(z) = z^2$ og tegn nivåkurvene deres i samme koordinatsystem.

$\boxed{5}$ Gjenta for $f(z) = \sin z$, $\boxed{6}$ $f(z) = e^z$, $\boxed{7}$ $f(z) = 1/z$ $\boxed{8}$ og $f(z) = z + 1/z$.

Alt det der med cauchyriemann og så videre er en blanding av fascinerende og forvirrende når man ser det første gang. Det er mye greier med komplekse funksjoner, og vi er over i en del av matematikken som av mange betraktes mer som som en form for kunst enn en form for vitenskap. Studiet av det helligste av det hellige, nemlig Riemanns $\zeta$-funksjon[6]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{\text{alle primtall } p} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

er en gren av den komplekse analysen.[7]

$\boxed{9}$ Her hadde det vært artig med en oppgave om Riemanns $\zeta$-funksjon, men jeg fant ingenting som hadde passelig vanskelighetsgrad, så du får avskrives med å bruke Cauchy-Riemann-likningene til å sjekke at $f(z) = \overline{z}$ ikke er deriverbar istedet. Skisser nivåkurvene til real- og imaginærdelen.

Arbeidshesten i kompleks funksjonsteori er det komplekse linjeintegralet:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\, dt$$

Her er $f$ en kompleks funksjon og $\Gamma$ en glatt kurve i det komplekse planet, parametrisert av $z(t)$. Tangentvektoren til $z(t)$ er gitt ved $z'(t)$. For eksempel er

$$z(t) = e^{it} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

er en parametrisering av enhetssirkelen, med tangent $z'(t) = ie^{it}$.

$\boxed{19/2}$ Finn en parametrisering for en sirkel med radius 2 og sentrum i $1 + i$.

Det komplekse linjeintegralet oppfører seg litt som linjeintegral over vektorfelt. Regn ut

$$\int_\Gamma z^2\, dz$$

der $\Gamma$ er en

$\boxed{10}$ kvart enhetssirkel fra realaksen til imaginæraksen i det komplekse planet.

$\boxed{11}$ rett linje mellom de samme punktene som i forrige oppgave.

$\boxed{12}$ først langs den ene av disse kurvene og så tilbake langs den andre.

$\boxed{13}$ en tilfeldig kurve at ditt frie valg.

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function`

[7] Hvis du virkelig er interessert i primtall, må du kunne kompleks funksjonsteori - du får faktisk en million dollar om du finner ut om riemannhypotesen er sann eller ikke. Gødtere enn prim som de sier på Gjøvik.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis`

Oppgave 10-13 er konstruert for at du skal oppdage noe som calles **Cauchys integralteorem**. Det kan formuleres på flere måter, men det enkleste er å si at dersom $f$ er deriverbar på $\Omega$ og $\Gamma$ er en lukket stykkevis glatt kurve i $\Omega$, er

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

$\boxed{14}$ Hvis du gjør som Cauchy og antar at $u$ og $v$ har kontinuerlige partiellderiverte (og at $\Gamma$ er stykkevis glatt og alt det der) kan du faktisk vise dette fra Greens teorem. Trikset er å studere vektorfeltet $F = (u, -v)^T$.

Problemene starter hvis det inni integrasjonskurven finnes ett eller flere punkter der funksjonen ikke er deriverbar. Da kan integralet bli null eller ikke.

$\boxed{15}$ Gjenta oppgave 10-13, men med $f(z) = \bar{z}$ istedet for $z^2$.

Funksjonen i oppgave 14 er ikke deriverbar noe sted. Dette er en situasjon man ikke støter på så ofte i anvendelser. Det vanligste er at man må integrere noe som har en singularitet i et punkt $z_0$. Dette er et punkt der funksjonen ikke er definert, og i kompleks analyse kalles punktet en **pol**. Dersom integrasjonskurven omslutter en pol, kan alt skje, integralet kan bli null eller ikke.

$\boxed{16}$ Beregn $\displaystyle\int_\Gamma z^n\,dz$ for alle heltallige $n$, der $\Gamma$ er enhetssirkelen.

$\boxed{17}$ Beregn $\displaystyle\int_\Gamma (z - z_0)^n\,dz$ der $\Gamma$ er en sirkel sentrert i $z_0$ med radius $r$ for alle heltallige $n$.

Komplekse linjeintegraler er en av de tingene som dukker opp i anvendelser, og i anvendelser er det selvfølgelig gunstig å kombinere Cauchys integralteorem med kjente resultater og lure triks heller enn å slite seg ut på antiderivasjon.

$\boxed{18}$ Beregn $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z^2-1}\,dz$ der $\Gamma$ er en sirkel sentrert i $1$ med radius $1$. (Hint: Skriv om integranden.)

$\boxed{19}$ Beregn $\displaystyle\int_\Gamma e^{-z^2}\,dz$ der $\Gamma$ er enhetssirkelen. (Hint: Du får lov til å taylorutvikle.)

$\boxed{20}$ Under har jeg tegna noen kurver. Beregn $\displaystyle\int_\Gamma (z - z_0)^n\,dz$ for alle kurvene og alle heltallige $n$.