3 - 9 - LINJEINTEGRALER II

$\boxed{1}$ Funksjonen

$$f(z) = z$$

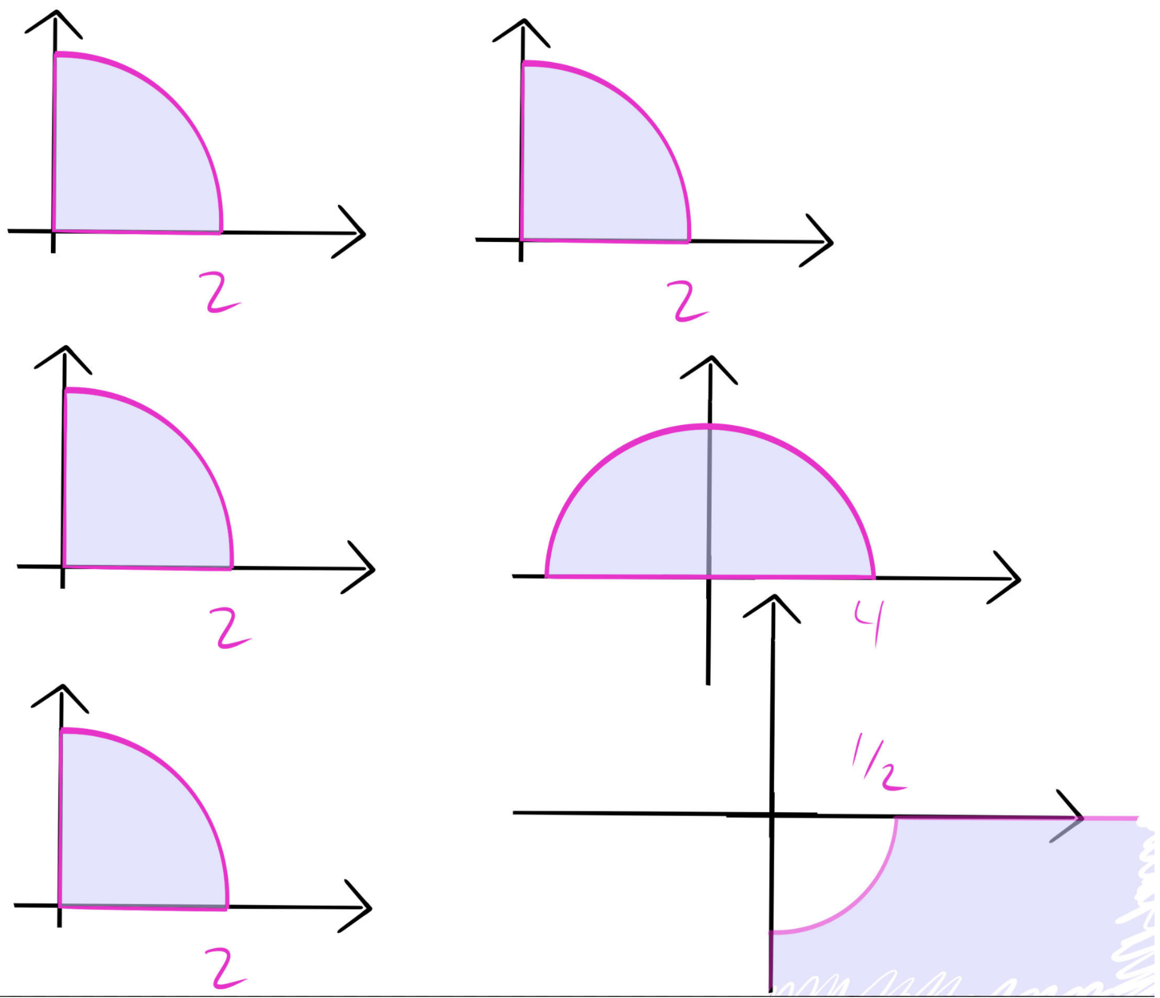
kalles enhetsavbildningen og gjør ingenting med z, så bildet av Ω blir bare Ω. På de to neste er det lurt å skrive $z = re^{i\theta}$. Vi får

$$f(re^{i\theta}) = \left(re^{i\theta}\right)^2 = r^2 e^{2i\theta}$$

og da ser vi at radien kvadreres og argumentet dobles. Med andre ord blir bildet av Ω en halv sirkel med radius 4. Så ser vi at

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

slik bildet av $1/z$ sender Ω alt utenfor en kvartsirkel med radius $1/2$ i fjerde kvadrant.



$\boxed{2}$ I oppgave 12 i forrige økt viste du at og at konservative vektorfelter er sirkulasjonsfrie. Den motsatte implikasjonen gjelder under noen betingelser på glattheten på vektorfeltet, men dette er mye vanskeligere å vise. I oppgave 11 viste du at harmoniske funksjoner har divergensfritt gradientfelt, så da kommer det kanskje ikke som et sjokk at man kan bruke komplekse funksjoner til å modellere forskjellige idealiserte flytproblemer.

$\boxed{3}$ Her er det bare å ta vise at skalarproduktet av gradientene til u og v er null ved bruke cauchy-riemannlikningene. Jeg gjorde det i forelesning.

$\boxed{4}$ Vi beregner

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

slik at $u(x, y) = x^2 - y^2$ og $v(x, y) = 2xy$. Du finner plot av nivåkurvene til real- og imaginærdelen i samme koordinatsystem her:
`https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_07.html`

$\boxed{5}$ Vi husker fra TMA4106 at

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(x + yi)\\ &= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy\\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\end{aligned}$$

Å tegne nivåkurvene til disse er nok litt i hardeste laget for eksamen.

$\boxed{6}$ Denne er lett å beregne:

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Tror nok ikke jeg ber deg om å skissere disse heller på eksamen.

$\boxed{7}$ Denne er også lett å beregne:

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Nivåkurvene til disse er ikke så ille, vi skriver

$$c = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

nei vent, la oss omdøpe konstanten C litt:

$$\frac{1}{c} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Da får vi

$$cx = x^2 + y^2$$

eller

$$\frac{c^2}{4} = (x - c/2)^2 + y^2$$

slik at vi får sirkler sentrert i $(c/2, 0)$ med radius $c^2/4$. Omtrent samme for v.

$\boxed{8}$ Hm:

$$x + iy + \frac{1}{x+iy} = x + iy + \frac{x-iy}{x^2+y^2} = x + \frac{x}{x^2+y^2} - i\left(y + \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Nivåkurvene til disse er litt verre, vi har ikke trent på å skissere algebraiske kurver av tredje grad i både x og y.

$\boxed{9}$ Funksjonen er

$$f(z) = \overline{z} = x - yi$$

så real- og imaginærdelene blir $u(x,y) = x$ og $v(x,y) = -y$. Dette paret tilfredsstiller ikke den første cauchyriemannlikningen, så da kan ikke f være deriverbar. Merk at u og v er harmoniske funksjoner, og nivåkurvene står ortogonalt på hverandre. Så en kompleks deriverbar funksjon lar seg ikke avspise med hvilket som helst par med harmoniske funksjoner med ortogonale nivåkurver.

$\boxed{19/2}$ $z(t) = 1 + i + 2e^{it}$.

$\boxed{10}$ En parametrisering for den kvarte sirkelen er $z(t) = e^{it}$ der $t \in [0, \pi/2]$, så integralet blir

$$\int_\Gamma z^2 \, dz = \int_0^{\pi/2} e^{2it} i e^{it} \, dt = i \int_0^{\pi/2} e^{3it} \, dt = \frac{1}{3} e^{3it}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\left(e^{3\pi i/2} - 1\right) = \frac{1}{3}\left(-1 - i\right).$$

$\boxed{11}$ En parametrisering for den rette linjen er $z(t) = 1 - (1-i)t$ der $t \in [0,1]$, så integralet blir

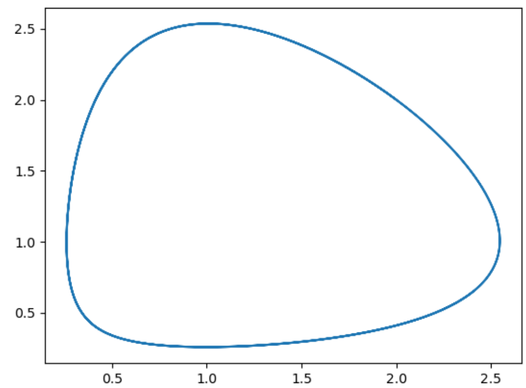
$$\begin{aligned}\int_\Gamma z^2 \, dz &= \int_0^1 \left(1 - (1-i)t\right)^2 \cdot (-1+i) \, dt \\ &= (-1+i) \int_0^1 \left(1 - (1-i)t\right)^2 \, dt \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - (1-i)t\right)^3\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(-i - 1\right)\end{aligned}$$

$\boxed{12}$ Da får vi null siden integralene er like.

$\boxed{13}$ Jeg tror jeg velger å integrere over lotkavolterrakurven, smelt opp i det komplekse planet. Det finnes som vi vet ingen pen parametrisering for denne, men vi får

$$\int_\Gamma z^2 \, dz = 0.$$

Dette er på grunn av Cauchys teorem - f er nemlig kompleks deriverbar, og da er integralet over alle lukkede kurver null, akkurat som for linjeintegral over konservative vektorfelt.



$\boxed{14}$ Hvis du gjør som Cauchy og antar at u og v har kontinuerlige partiellderiverte (og at Γ er stykkevis glatt og alt det der) kan du faktisk vise dette fra Greens teorem. Trikset er å studere vektorfeltet $F = (u, -v)^T$. La Γ være en lukket kurve som omslutter området Ω. Vi beregner

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\, dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \left(u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\right)\left(x(t) + iy(t)\right)\ dt \\
&= \int_a^b \left(u(x(t), y(t))x(t) - v(x(t), y(t))x(t)\right) + i\left(u(x(t), y(t))y(t) + v(x(t), y(t))x(t)\right)\ dt \\
&= \int_\Gamma F \cdot N ds + i \int_\Gamma F \cdot T ds \\
&= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} ds + i \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} ds = 0.
\end{aligned}$$

Nå går et an å vise at dette er sant uten å gjøre alle de nødvendige antagelsene på u og v for å bruke Greens teorem, men dette er mye vanskeligere, og på Cauchys tid visste de ikke så mye om komplekse funksjoner. Om du synes komplekse funksjoner er artig, kan du sjekke ut bøkene til Ahlfors eller Stein.

$\boxed{15}$ En parametrisering for den kvarte sirkelen er $z(t) = e^{it}$ der $t \in [0, \pi/2]$, så integralet blir

$$\int_\Gamma \overline{z}\, dz = \int_0^{\pi/2} e^{-it} i e^{it}\, dt = \frac{\pi i}{2}$$

En parametrisering for den rette linjen er $z(t) = 1 - (1-i)t$ der $t \in [0,1]$, så integralet blir

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \overline{z}\, dz =& \int_0^1 (1-(1+i)t) \cdot (-1+i)\; dt \\
=&(-1+i) \int_0^1 (1-(1+i)t)\; dt \\
=&\,(-1+i)\left(t-(1+i)\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\
=&\frac{-i}{2}\,(-i+1)
\end{aligned}$$

Merk at forskjellige integrasjonskurver gir forskjellig integral. Dette er analogt til å integrere et ikkekonservativt vektorfelt langs to forskjellige kurver. Lotkavolterrakurven går dessverre ikke å integrere over med penn og papir, for det finnes ikke eksplisitt uttrykk for den og ikke er f deriverbar heller.

$\boxed{16}$ Vi må seff ha parametrisering for enhetssirkelen i det komplekse planet:

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, \quad z(\theta) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)\} \qquad z'(\theta) = ie^{it}.$$

Så er det bare å integrere:

$$\int_\Gamma z^n\; dz = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} ie^{i\theta}\; d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}\; d\theta = \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

$\boxed{17}$ Vi må seff ha parametrisering for den gitte sirkel

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, \quad z(\theta) = z_0 + re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)\} \qquad z'(\theta) = ire^{it}.$$

Så er det bare å integrere:

$$\int_\Gamma (z-z_0)^n\; dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} ire^{i\theta}\; d\theta = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}\; d\theta = \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Jammen er det enkelt og greit i kompleks analyse.

$\boxed{18}$ Vi skriver om integranden og beregner

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^2-1}\; dz = \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\; dz = \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{1}{z-1}\; dz - \int_\Gamma \frac{1}{z+1}\; dz = 2\pi i.$$

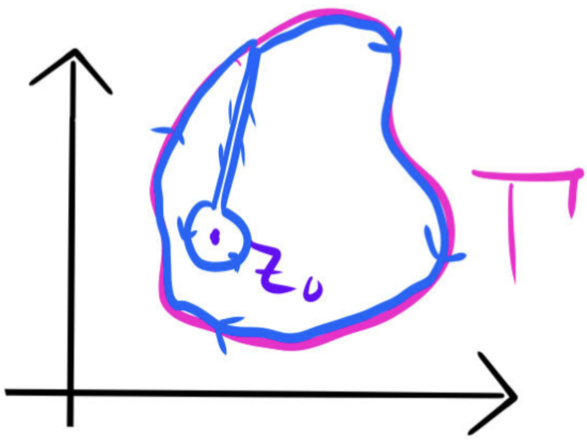
Det første av disse integralene er et spesialtilfelle av oppgavene over, mens det andre blir null på grunn av cauchys teorem. Jeg glemte å skrive at sirkelen skulle være traversert mot klokken, men det kan du ta som underforstått.

$\boxed{19}$ Vi skriver

$$e^{-z^2} = 1 - \frac{1}{z^2} + \cdots$$

Alle disse leddene integreres til null (vi har gjort det i oppgave 17), så da blir det vel null.

$\boxed{20}$ Her er trikset å innse at du kan lage en kurve som ser slik ut:



Siden den blå kurven går i et område der integranden er deriverbar, er integralet over den blå kurven null, og de to rette bitene inn og ut fra sirkelen kansellerer, så ta må integralet over den rosa kurven være det samme som integralet over sirkelen, og dette beregnet vi i oppgave 17. Det er null om z_0 er på utsiden eller $n = -1$, og $2\pi i$ om z_0 er på innsiden og $n = -1$.