3 - 8 - ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM II

I denne økten skal vi prøve å finne ut hvordan vi tolker de fire partiellderiverte i jacobimatrisen til en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Arbeidshesten vår skal være et lite rektangel med hjørner i $(x_1, x_2)^T$, $(x_1 + h_1, x_2)^T$, $(x_1, x_2 + h_2)^T$ og $(x_1 + h_1, x_2 + h_2)^T$.

$\boxed{1}$ Sett opp parametriseringer for alle sidene, traversert mot klokken.

Arbeidet en kraft f gjør på noe som reiser langs kurven Γ parametrisert ved $x : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, får vi ved å prikke med enhetstangentvektoren til Γ og linjeintegrere:

$$\int_\Gamma f^T T ds = \int_a^b f^T(x(t))T(t)|\dot{x}(t)|\, dt = \int_a^b f_1(x(t))\dot{x}_1(t) + f_2(x(t))\dot{x}_2(t)\, dt$$

Husk ellers definisjonen av partiellderivert:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f_1(x_1, x_2 + h_2) - f_1(x_1, x_2)}{h_2}$$

Det må være klart at dersom f er kraft, får de partiellderiverte benevning kraft per meter. I statikken som byggingeniørene lærer kalles kombinasjonen av $f_1(x_1, x_2 + h_2)$ og $f_1(x_1, x_2)$ et **kraftpar**.

$\boxed{2}$ Anta rektangelet over er ganske lite og finn det totale arbeidet f gjør på en partikkel som reiser én gang rundt kanten. Hva vil skje med en liten plate som plasseres i kraftfeltet i x?

Analysens fundamentalteorem kommer i mange flere varianter enn den du lærte på skolen. i denne økten skal vi ta unna en variant som heter **Greens teorem**, og kommer i flere ekvivalente versjoner. For å berede grunnen, kan du studere på uttrykket

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

$\boxed{3}$ Hvis rektangelet over hadde vært basen i en todimensjonal riemannsumskyskraper, ville volumet av skyskraperen vært sånn omtrent lik utrykket over ganget med $h_1 h_2$. Hva er sammenhengen mellom dette volumet og arbeidet du fant i oppgave 2?

Gjorde du oppgave 3 sånn nogenlunde, kom du frem til at volumet under

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

på et lite område gir deg arbeidet f gjør på en partikkel som reiser rundt kanten av området. Uttrykket kalles **sirkulasjonen** til f - synonymer er **rotasjon** og **curl**. Greens teorem sier at volumet under sirkulasjonen på Ω gir deg arbeidet rundt $\partial\Omega$:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \int_{\partial\Omega} f^T T ds$$

Her er det selvfølgelig masse betingelser - $\partial\Omega$ må være stykkevis glatt, enkeltsammenhengende og traversert mot klokken, og kraftfeltet f må ha kontinuerlige partiellderiverte på en åpen omegn som inneholder $\partial\Omega$. Alt dette står i Arnes bok om du er interessert.

$\boxed{4}$ En bortadgående laminær vannstrøm utøver en kraft gitt ved

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finn det totale arbeidet kraften gjør på noe som reiser langs én gang rundt en sirkel sentrert i $(1,1)^T$ med radius 1. Regn ut arbeidet både direkte og med Greens teorem og dobbeltsjekk at du får det samme svaret.

Den laminære vannstrømmen over gir oss faktisk et lurt triks for å beregne arealet av Ω, siden sirkulasjonen er -1 .

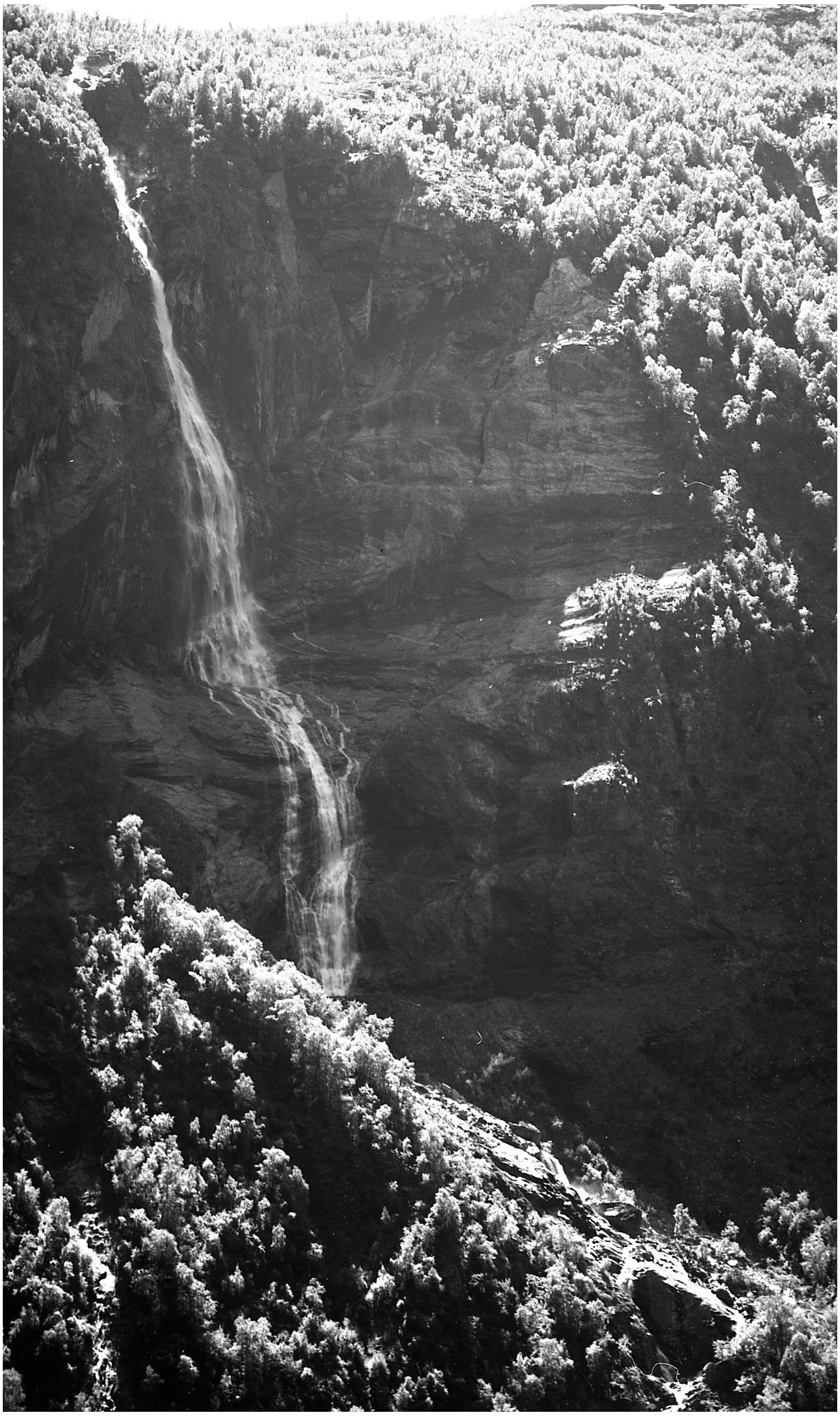
$\boxed{5}$ Bruk Greens teorem til å vise at arealet av Ω er

$$\int_a^b x_1(t)\dot{x}_2(t)\, dt$$

dersom $x : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ parametriserer $\partial\Omega$ mot klokken. Finn arealet omsluttet av **asteroiden** $x(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)^T$.

I økt 3-2 satte vi opp enhetstangent- og enhestnormalvektor, og i økt 3-5 fant vi arbeidet en kraft gjør på noe som reiser langs Γ ved å prikke kraften med enhetstangenten og linjeintegrere. Nå skal vi gjøre noe liknende.

$\boxed{6}$ Du står i en elv med vadebukser. Elven har konstant dybde på én meter, og elvens fart i meter per sekund er gitt ved $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Du har en kurve Γ parametrisert ved $x : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ og du lurer på hvor mye vann som krysser denne kurven per tidsenhet.



Fluksen til vektorfeltet f over Γ får vi ved å prikke med enhetsnormalvektoren og integrere:

$$\int_\Gamma f^T N ds = \int_a^b f(x(t))^T N(t)|\dot{x}(t)|\, dt = \int_a^b f_1(x(t))\dot{x}_2(t) - f_2(x(t))\dot{x}_1(t)\, dt$$

Merk at her er det to valg - vi kan la enhetsnormalvektoren peke den andre veien:

$$\int_\Gamma f^T N ds = \int_a^b f(x(t))^T N(t)|\dot{x}(t)|\, dt = \int_a^b -f_1(x(t))\dot{x}_2(t) + f_2(x(t))\dot{x}_1(t)\, dt$$

I så fall bytter man bare fortegn på hele greia og måler fluksen motsatt vei over Γ.

$\boxed{7}$ Merk at vi kan ikke bruke definisjonen av enhetsnormalvektor fra økt 3-2. Hvorfor?

For å tolke de partiellderiverte

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

kan vi bruke en liknende teknikk som vi gjorde for

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

men det er best å tolke f som væskeflyt istedet for kraft.

$\boxed{8}$ Anta rektangelet over er ganske lite og finn sånn omtrent den totale fluksen ut av rektangelet.

Uttrykket

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

kalles **divergensen** og gjør en liknende jobb for fluksen som sirkulasjonen gjør for arbeidet.

$\boxed{9}$ Hvis rektangelet over hadde vært basen i en todimensjonal riemannsumskyskraper, ville volumet av skyskraperen vært sånn omtrent lik divergensen ganget med $h_1 h_2$. Hva er sammenhengen mellom dette volumet og arbeidet du fant i oppgave 2?

Divergensen er et mål på hvor mye vektorfeltet ekspanderer i hvert punkt, og Greens teorem kan også formuleres som at volumet under divergensen til f på Ω skal være lik f sin fluks ut av $\partial\Omega$:

$$\iint_\Omega \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \int_{\partial\Omega} f^T N ds$$

$\boxed{10}$ En bortadgående laminær vannstrøm har hastighet gitt ved

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finn den totale fluksen ut av sirkelen sentrert i $(1,1)^T$ med radius 1. Regn ut fluksen både direkte og med Greens teorem og dobbeltsjekk at du får det samme svaret.

Dersom divergensen til f er null overalt, sier vi at f er divergensfritt. Det skjer i den virkelige verden dersom f er en inkompressibel væske. Vann er for eksempel så og si inkompressibelt, mens gass er alt annet enn inkompressibelt.

$\boxed{11}$ En viktig klasse skalarfelter har divergensfritt gradientfelt. Hva slags skalarfelter er dette?

Dersom sirkulasjonen til t er null, sier vi at f er **sirkulasjonsfritt**, **rotasjonsfritt** eller **curlfritt**. Gravitasjonskraften og coloumbkraften er begge sirkulasjonsfrie - dette skal vi komme tilbake til når vi lærer om sirkulasjon og divergens i tre dimensjoner.

$\boxed{12}$ Vis at et konservativt vektorfelt er sirkulasjonsfritt.