3 - 8 - ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM II

$\boxed{1}$ Parametriseringen for den rette linjen fra $(x_1, x_2)^T$ til $(x_1 + h_1, x_2)^T$ kan for eksempel settes opp slik

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og la $t \in [0, 1]$. De andre går på samme måte.

$\boxed{2\text{-}3}$ Disse gjorde jeg ganske nøye i forelesning den 8. oktober. Dessuten passer de ikke å gi på eksamen, de er der mer for å gi konseptuell forståelse.

$\boxed{4}$ En bortadgående laminær vannstrøm utøver en kraft gitt ved

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi får vel begynne med å parametrisere sirkelen slik:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

og beregne tangentvektoren:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

og beregne arbeidet:

$$W = \int_{\partial\Omega} f \cdot ds = \int_0^{2\pi} (1 + \sin t)(-\sin t)\; dt = -\int_0^{2\pi} \sin^2 t\; dt = -\pi$$

Beregner vi høyresiden i Greens teorem

$$\iint_\Omega \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \int_{\partial\Omega} f \cdot ds$$

istedet, får vi dobbeltintegralet

$$-\iint_\Omega dx = -\pi$$

$\boxed{5}$ La

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Fra Greens teorem ser vi

$$|\Omega| = \iint_\Omega 1\; dx = \iint_\Omega \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \int_{\partial\Omega} f \cdot ds = \int_a^b x_1(t)\dot{x}_2(t)\; dt.$$

Likeledes gir vektorfeltet

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

at

$$|\Omega| = -\int_a^b x_2(t)\dot{x}_1(t)\, dt.$$

Arealet omsluttet av asteroiden blir

$$3\int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t\, dt.$$

Dette ser grisete ut, men er faktisk veldig kjapt å ta med Eulers formel, siden

$$\int_0^{2\pi} e^{int}\, dt = 0$$

så lenge $n \neq 0$ er et heltall. Vi beregner først

$$\begin{aligned}
\cos^4 t \sin^2 t &= -\frac{1}{64}\left(e^{it} + e^{-it}\right)^4 \left(e^{it} - e^{-it}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}\right)\left(e^{2it} - 2 + e^{-2it}\right)
\end{aligned}$$

Alt unntatt konstantleddene i dette uttrykket kommer til å integrere til null, så må bare samle opp dem, og får følgelig

$$3\int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t\, dt = -\frac{3}{64}\cdot(4 - 6\cdot 2 + 4)\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{8}.$$

$\boxed{6\text{-}9}$ Også gjort i forelesning den 8. oktober. Disse passer heller ikke på eksamen.

$\boxed{10}$ Her blir fluksen null. Venstresiden i

$$\iint_\Omega \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \int_{\partial\Omega} f^T N ds$$

er jo null siden integranden er det. Vi dobbeltsjekker ved å regne ut fluksen. Parametriseringen for sirkelen er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

og enhetsutnormalvektoren er

$$N = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

slik at fluksen blir

$$\int_{\partial\Omega} f^T N ds = \int_0^{2\pi} (1 + \sin t)\cos t\, dt = 0.$$

$\boxed{\text{11-12}}$ Dersom strømningsfeltet er konservativt, er det gradienten til et skalarfelt, og dersom skalarfeltet er harmonisk, er divergensen til flytfeltet null, slik at væsken er inkompressibel. Det er også lett å sjekke at rotasjonen til en gradient er null, så litt forenklet kan vi si at gradienten til en harmonisk funksjon er en modell av inkompressibel og rotasjonsfri væskeflyt. Ikke en spesielt bra modell kanskje, men i gamle dager var det det de hadde.