3 - 7 - KOORDINATAVBILDNINGER I

I denne økten skal vi studere funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$, men vi skal tenke litt annerledes på dem enn i vektorfeltøkten, og motivasjonen er en helt annen. Hvis du fikk til oppgave 17 i forrige økt, skrev du opp at volumet er

$$\iint_\Omega f\, dS = \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{4}\sqrt{(16-x_1^2)}} -x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 8 \; dx_2 dx_1.$$

Dette integralet er ikke så lett å beregne for hånd med mindre du er topptrent i énvariabel antiderivasjon. Dette er ikke hensiktsmessig å bruke syke mengder tid på - det er bedre bruk av tiden din å innse at integralet kan skrives slik:

$$\iint_\Omega f = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (-16r^2\cos^2\theta - 12r^2\cos\theta\sin\theta - 2r^2\sin^2\theta + 16r\cos\theta + 18\sin\theta + 8)\; 12r dr d\theta$$

Dette integralet er grisete, men trivielt å beregne så lenge du husker Eulers formel. Nå skal vi se på hvordan vi kommer frem til denne formen. Akkurat som i forrige økt, skal gå helt tilbake til envariabel kalkulus og repetere litt. Arealet av enhetsirkelen er

$$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\; dx.$$

Dette integralet er heller ikke så lett å beregne for hånd med mindre du har en svær integrasjonstabell i knolten, men substitusjonen

$$x = \sin\theta \qquad du = \cos\theta\; d\theta$$

gjør susen:

$$\begin{aligned} 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\; dx &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\; d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\; d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} 1+\cos(2\theta)\; d\theta = \pi \end{aligned}$$

$\boxed{1}$ Regn ut arealet av en ellipse med halvakser a og b. En liknende substitusjon gjør vei i vellinga.

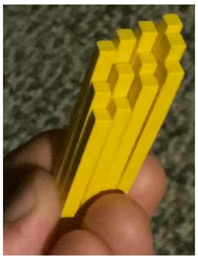
Vi kan fikse krøkkete dobbeltintegraler på liknende vis, men da må vi se funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ som **koordinatavbildning** istedet for vektorfelt. Finn bildet av enhetskvadratet under lineæravbildningen $g(x) = Ax$ når A er

$\boxed{\text{2-1}}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2-2}}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2-3}}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2-4}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2-5}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{2-6}}$ $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2-7}}$ $\begin{pmatrix} 2\cos\alpha & -2\sin\alpha \\ 2\sin\alpha & 2\cos\alpha \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2-8}}$ $\begin{pmatrix} 2\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 2\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Når vi bytta koordinater i enhetssirkelintegralet på første side, måtte vi gange med $\cos\theta$ som kompensasjon for at $\sin\theta$ reiser fra 0 til 1 på en litt annen måte enn identitetsfunksjonen gjør - identitetsfunksjonen går med jevn fart fra 0 til 1, mens sinusfunksjonen går saktere og saktere mot 1 etterhvert som θ nærmer seg $\pi/2$. Dette kommer vi til å måtte kompensere for i dobbeltintegraler også, og da er det viktig å forstå at avbildninger strekker og krymper ting.

$\boxed{3}$ Finn arealet av alle bildene i oppgavene over.



Hvis du skjønte arealkompensasjonsideen, har du nøkkelen til å forstå dobbeltintegral over tilsynelatende kompliserte definisjonsområder. Hvis du tenker på en todimensjonal riemannsum som en masse små skyskrapere med kvadratisk grunnflate (til høyre ser du et litt patetisk forsøk på å illustrere den ideelle gasslov $f(x) = x_1 x_2$), kan du tenke at koordinatavbildningen forvrenger grunnflatene, og da må du gange alle de små volumene med arealfaktoren. Finn volumet under den ideelle gasslov når Ω er

$\boxed{4}$ parallellogrammet med hjørner i $(0,0)^T$, $(2,1)^T$, $(1,2)^T$ og $(3,3)^T$.

$\boxed{5}$ et kvadrat med hjørner i $(0,0)^T$, $\left(\sqrt{3}/2, 1/2\right)^T$, $\left(-1/2, \sqrt{3}/2\right)^T$ og $\left(1/2, -\sqrt{3}/2\right)^T$, altså enhetskvadratet rotert tretti grader.

$\boxed{6}$ de andre bildene i oppgave 2 over, samt diamanten fra oppgave 11 i forrige økt.

I oppgavene over er arealutvidelsesfaktoren konstant siden $g(x) = Ax$ er en lineæroperator. For øvrig heter det ikke egentlig “arealutvidelsesfaktoren”, det var bare et ord jeg fant på. Det heter egentlig **jacobideterminanten**[1], og dette er determinanten til jacobimatrisen.

$\boxed{7}$ Finn jacobideterminanten til $g(x) = Ax$ for alle matrisene på forrige side.

[1]https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian_matrix_and_determinant

På forrige side var alt lineæroperatorer. Disse hjelper oss til å takle situasjoner der Ω er et parallellogram. For å takle volumet av grillhytten trenger vi noe litt mer komplisert, men trikset er det samme, nenmlig å finne en koordinatavbildning fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ slik at Ω *er verdimengden til koordinatavbildningen dersom definisjonsmengden er rektangulær*. Et av de enkleste eksemplene kjenner du allerede godt, nemlig $g : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x = g(r, \theta) = \begin{pmatrix} g_1(r,\theta) \\ g_2(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Koordinatparet (r, θ) kalles **polarkoordinater**, og g kalles **polarkoordinatavbildningen**.[2] Det er ikke så vanlig å tilordne noen bestemt bokstav til koordinatavbildninger, men jeg har valgt å bruke bokstaven g inntil videre. Det vanligste er å bare skrive $x(r, \theta)$ eller noe sånt.[3] Dette er kjappere å skrive, men kan lede inn i tvetydighet.

$\boxed{8}$ Regn ut jacobideterminanten til polarkoordinatavbildningen og finn volumet under den ideelle gasslov når Ω er den delen av enhetssirkelskiven som ligger i første kvadrant.

$\boxed{9}$ Et område Ω er begrenset av

$$1 \le r \le 2 \qquad \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}.$$

Skisser Ω og og finn volumet under den ideelle gasslov på Ω.

Akkurat som linjeintegraler over skalarfelt kan tolkes som massen til en tråd der skalarfeltet gir massetettheten, kan dobbeltintegraler tolkes som massen til en flat ting Ω dersom f er massetettheten i vekt per areal:

$$m = \iint_\Omega f$$

Massesenteret[4] er gitt ved

$$\frac{1}{m}\iint_\Omega x f(x)\, dx = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} \iint_\Omega x_1 f(x)\, dx \\ \iint_\Omega x_2 f(x)\, dx \end{pmatrix}.$$

Anta konstant massetetthet, og finn massesentrene til

$\boxed{10}$ alle områdene på forrige side. $\boxed{11}$ et kakestykke.

Det er ellers ikke bare i dobbeltintegraler koordinattransformasjoner er nyttige. Fysikere simpelthen *elsker* områder med radiell symmetri, for det første fordi slike områder er lette å gjøre beregninger på, antagelig også fordi de er lett å produsere. En overfres eller en drill lager jo sirkulære hull. Det er nok billigere å produsere strømkabler med sirkulære enn elliptiske tverrsnitt.

$\boxed{12}$ Fysikere elsker også Laplaces likning. Vis at laplaceoperatoren blir

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

i polarkoordinater, og finn alle løsninger av laplaces likning som ikke avhenger av θ.

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system`
[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_common_coordinate_transformations`
[4] `https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_18.html`

La oss avslutte med noen litt artige oppgaver. I uttrykket for standardnormalfordelingen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$$

er det en multiplikasjonsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, som skyldes at arealet under en normalfordeling må være 1. Det sies at Lord Kelvin[5] under en forelesning spurte ut i salen om det var noen som visste hva en matematiker var for noe. Ingen svarte. Da skrev han opp likningen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

pekte på den og sa:

"En matematiker er en som synes dette er like innlysende som det er for deg at $2 \cdot 2 = 4$."

$\boxed{13}$ Vi vet at $e^{-x^2/2}$ ikke kan antideriveres på noen enkel måte, men nå kan vi få has på integralet over allikevel. Regn ut at

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

ved å beregne I^2 med polarkoordinater.

Det finnes mange smarte koordinatavbildninger. Husk at tommelfingerregelen for å finne korrekt koordinatavbildning er at Ω skal være bildet av et gunstig område, helst et rektangel.

$\boxed{14}$ Finn en gunstig koordinatavbildning dersom Ω er ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

og finn volumet av grillhytten.

$\boxed{15}$ Du går en skitur på en øy gitt ved

$$h(x) = 1 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2$$

der $h(x) = 0$ er havnivået. Hva slags kurver er ekvidistanselinjene? Finn øyas totale volum.

$\boxed{16}$ Finn volumet under den ideelle gasslov når Ω er området mellom parablene

$$x_2 = x_1^2, \qquad x_2 = 2x_1^2, \qquad x_1 = x_2^2 \qquad \text{og} \qquad x_1 = 2x_2^2.$$

$\boxed{17}$ Her er en gammel eksamensoppgave. La $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 + 4$$

der Ω er ellipseskiven gitt ved

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + (x_1 - x_2)^2 \leq 1.$$

Finn volumet under grafen til f.

[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Lord_Kelvin`