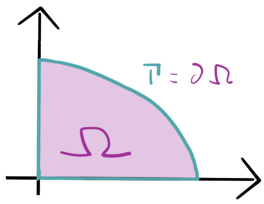
3 - 6 - DOBBELTINTEGRALER



Du bygger videre på din stilige grillhytte med grunnflate Ω og tak formet slik som fjellet h fra økt 3-3. Nei, vent, la oss ta et tak med litt enklere form, h ble designet for å ha et lokalt maksimum inne på Ω og er egentlig unødvendig komplisert. Vi tar heller den ideelle gasslov $f(x) = x_1 x_2$.
I forrige økt regnet vi ut arealet av den krumme veggen. Nå skal vi regne ut volumet av hytten. Volumet under grafen til $f : \Omega \to \mathbb{R}$ skrives

$$\iint_\Omega f$$

og beregnes ikke ulikt volumet av et omdreiningslegeme, så la oss repetere dette. Hvis du dreier $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ én gang om x-aksen, får du en slags pølse med variabel tykkelse. Volumet er

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

fordi arealet av pølsens tverrsnitt er gitt ved

$$A(x) = \pi f^2(x)$$

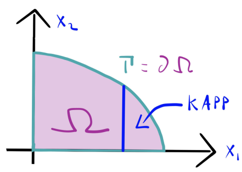
og hvis du integrerer en funksjon som angir et areal, blir resultatet et volum.

$\boxed{1}$ Drei litt på en bit av sinuskurven, for eksempel mellom to av nullpunktene, og finn volumet.

$\boxed{2}$ Vis at volumet til en kule med radius r er $\frac{4\pi}{3} r^3$.

$\boxed{3}$ Regn ut volumet av Gabriels trompet, altså $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = 1/x$.

Nøkkelen til å forstå volumet av omdreiningslegemer, er å forstå tverrsnittsfunksjonen A. Du må tenke at du har kappet omdreiningslegemet med en kappsag eller en motorsag eller en stor vinkelsliper, og så gir $A(x)$ arealet av tverrsnittet, og så integrerer du denne for å få volumet. Dobbeltintegraler fungerer akkurat på samme måte, men $A(x)$ beregnes litt annerledes.



$\boxed{4}$ Du kapper grillhytten i to med en enorm sag. Du tar en bestemt verdi for x_1 og kapper parallelt med x_2-aksen. Hva er $A(x_1)$?

$\boxed{5}$ Hva blir volumet?

Volumet av grillhytten er kanskje ikke det letteste å starte med, så la oss nå finne volumet av noe litt enklere. Dersom Ω er et rektangel blir det det veldig greit; la oss finne volumet under den ideelle gasslov når $\Omega = [0,1] \times [0,2]$:

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^2 \int_0^1 x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 = \int_0^2 \left(\int_0^1 x_1 x_2 \, dx_1 \right) dx_2.$$

Dette kalles et **iterert integral**, for det er et integral inni et annet integral. Det innerste integralet gir tverrsnittet som funksjon av x_2:

$$A(x_2) = \int_0^1 x_1 x_2 \, dx_1$$

$\boxed{6}$ Hvilken vei gikk motorsaga nå? Finn volumet.

Det er viktig å forstå at motorsaga kan gå begge veier - du velger selv.[1]

$\boxed{7}$ Beregn volumet med motsatt integrasjonsrekkefølge.

Det som kan gjøre dobbeltintegraler litt knotete, er at integrasjonsområdet Ω kan være mer komplisert enn et rektangel. La oss prøve trekanten med hjørner i $(0,0)^T$, $(1,0)^T$ og $(0,2)^T$. Knotet er at du får et funksjonsuttrykk i en integrasjonsgrense i det innerste integralet.

$\boxed{8}$ Sett opp integralet og beregn volumet. Prøv begge veier.

Her er en oppgave fra konten 2024:

$\boxed{9}$ La $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 3.$$

der Ω er trekanten med hjørner i $(0,0)$, $(3,0)$ og $(3,4)$. Finn volumet under grafen til f.

[1]Eller, ikke helt faktisk. Det finnes patologiske tilfeller der du må være forsiktig, men de kommer ikke du til å se noe til. Dette kalles **Fubinis teorem**.

Finn volumet under $f(x) = x_1 x_2$ når Ω er (sett opp begge veier)

$\boxed{10}$ trekanten med hjørner i $(0,0)^T$, $(1,1)^T$ og $(2,0)^T$.

$\boxed{11}$ diamanten med med hjørner i $(1,0)^T$, $(0,1)^T$, $(-1,0)^T$ og $(0,-1)^T$.

$\boxed{12}$ området mellom parabelen $x_2 = 1 - x_1^2$ og x_1-aksen.

$\boxed{13}$ området mellom $x_2 = 1 - x_1^3$ og x_1-aksen og x_2-aksen.

Og noen ganger trenger man ikke integrere - volumformlene fra ungdommsskolen gjør jobben. La a være en konstant, og finn

$\boxed{14}$ $\displaystyle\iint_{|x|^2 \leq a^2} a - |x| \, dx$ $\boxed{15}$ $\displaystyle\iint_{|x|^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - |x|^2} \, dx$ $\boxed{16}$ $\displaystyle\iint_{|x|^2 \leq a^2} a \, dx$

Noen ganger kan det blir vel grisete.

$\boxed{17}$ Finn volumet av grillhytten dersom taket er gitt ved $h(x) = -x_1^2 - x_1 x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 8$.

Eller kanskje du må bruke noen gamle triks.

$\boxed{18}$ Vis at

$$\iint_\Omega \frac{dx}{1 - x_1 x_2} = \frac{\pi^2}{6}$$

der Ω er enhetskvadratet i $\mathbb{R}^2$.

Flere oppgaver her:
https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/2024v/interaktiv_6.pdf
https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/2024v/plenumsregning_6.pdf

Trenger du enda fler liknende oppgaver, er det bare å gå løs på 1-7 i kapittel 10.2 i Arnes bok.