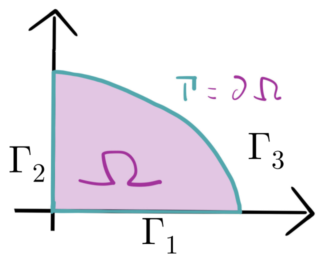
3 - 5 - LINJEINTEGRALER I

Akkurat som det finnes en forvirrende palett av funksjonstyper fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$ finnes det en forvirrende palett av integraler å stappe dem inn i. Vi skal begynne med det enkleste, nemlig **linjeintegralet**. Husk at buelengden til kurven Γ parametrisert ved $x : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ er

$$\int_\Gamma ds = \int_a^b |x'(t)|\, dt$$

La oss ta området fra vår tidligere fjelltur og gjøre litt om på tolkningen. Du har tenkt å bygge en stilig grillhytte med grunnflate Ω og tak formet som fjellet h. Du skal bestille panel og polykarbonat til veggene, og trenger derfor å regne ut veggens totale areal. Dette arealet skrives



$$\int_\Gamma f\, ds$$

og arealet av den krumme delen av veggen blir

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3} f\, ds &= \int_0^{\pi/2} f(x(\theta))\, |x'(\theta)|\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(-16\cos^2\theta - 12\cos\theta\sin\theta - 18\sin^2\theta + 16\cos\theta + 18\sin\theta + 8\right) \sqrt{16\sin^2\theta + 9\cos^2\theta}\, d\theta\end{aligned}$$

$\boxed{1}$ Bruk din forståelse av riemannsummer til å forklare at arealet er gitt av formelen over.

Integralet kalles **linjeintegralet til f over Γ**, og dersom Γ er parametrisert ved $x : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, skriver vi

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_a^b f(x(t))\, |x'(t)|\, dt.$$

Integralet kan tolkes fysisk på mange måter, men i begynnelsen bør du altså tenke på det som arealet til en husvegg der f er taket og Γ er husveggen slik den er tegnet i husets arealtegning. Det er vanlig å kreve at x tegner Γ på monotont vis, for ellers blir arealet feil - parametriseringen x får ikke lov til å stoppe opp, snu og kjøre tilbake eller noe sånt.

$\boxed{2}$ Hvordan får man til det? (Hint: Teksten mellom oppgave 13 og 14 i økt 3-2.)

En alternativ tolkning av linjeintegralet er at du har en brugde som beiter pelagisk og svømmer langs kurven Γ. Dersom planktontettheten er gitt ved f, blir linjeintegralet brugdens totale måltid.

$\boxed{3}$ En brugde svømmer langs enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$, og planktontettheten i vannet er gitt ved

$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1 x_2.$$

Brugden svømmer én gang fra x_2-aksen til x_1-aksen mot klokken. Hvor mye spiser den?

$\boxed{4}$ Brugden svømmer så fra x_1-aksen tilbake til x_2-aksen langs den rette linjen $x_1 + x_2 = 1$. Planktontettheten er den samme. Hvor mye spiser den på denne turen?

Foto: Greg Skomal

Hvis du har to forskjellige parametriseringer for den samme kurven Γ, får linjeintegralet over Γ den samme verdien. Dette følger av kjerneregelen.

$\boxed{5}$ Den rette linjen i oppgaven over kan parametriseres på mange forskjellige måter. Regn ut integralet med to forskjellige parametriseringer og dobbeltsjekk at du får det samme svaret.

Den vanligste måten å introdusere linjeintegraler på, er å si at $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ er massetetthet målt i kilo per meter og at Γ er en tråd med massetetthet f. Da blir linjeintegralet til f over Γ trådens totale masse. Denne tolkningen er litt teit, for om en tråd har varierende tetthet (tenk for eksempel på en gitarstreng spunnet med kobbertråd), er det ingen som tenker på denne tettheten som en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}$. La oss heller ta en brugdeoppgave til.

$\boxed{6}$ Det er dårlige tider i overflaten, og brugden må nedover i vannsøylen. Planktontettheten øker lineært med dybden og er gitt ved $f(x) = -x_3$, og brugden svømmer langs den sirkulære heliksen $x : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -t \end{pmatrix}.$$

Hvor mye spiser brugden på denne turen?[1]

[1] Det sies at steinbiten (`https://en.wikipedia.org/wiki/Atlantic_wolffish`) ikke kan svømme rett oppover, men er nødt til å følge en sirkulær heliks om den skal opp i vannsøylen. Jeg vet ikke om dette er sant, men på fridykkerkurs lærer de visst at om man erter på deg en steinbit er det bare å svømme rett opp. Send meg en epost om du har ertet på deg en steinbit noen gang.

Linjeintegralet over skalarfelt kombinerer to typer funksjoner - et skalarfelt som skal integreres og en vektorvaluert funksjon som angir kurven det skal integreres over. Dette er et viktig innsteg til et annet integral, nemlig **linjeintegral over vektorfelt**. Dette motiveres som følger. På skolen lærte du at arbeid er kraft ganger vei.

$\boxed{7}$ Du drar en ting tre meter bortetter gulvet. Den veier fem kilo og du bruker kraften 10 N parallelt med fartsretningen. Hvor stort arbeid har du utført etter denne operasjonen?

På skolen var stort sett kraften konstant og bevegelsen rettlinjet, men det hendte at du måtte gange kraften med cosinus til vinkelen mellom denne og bevegelsesretningen.

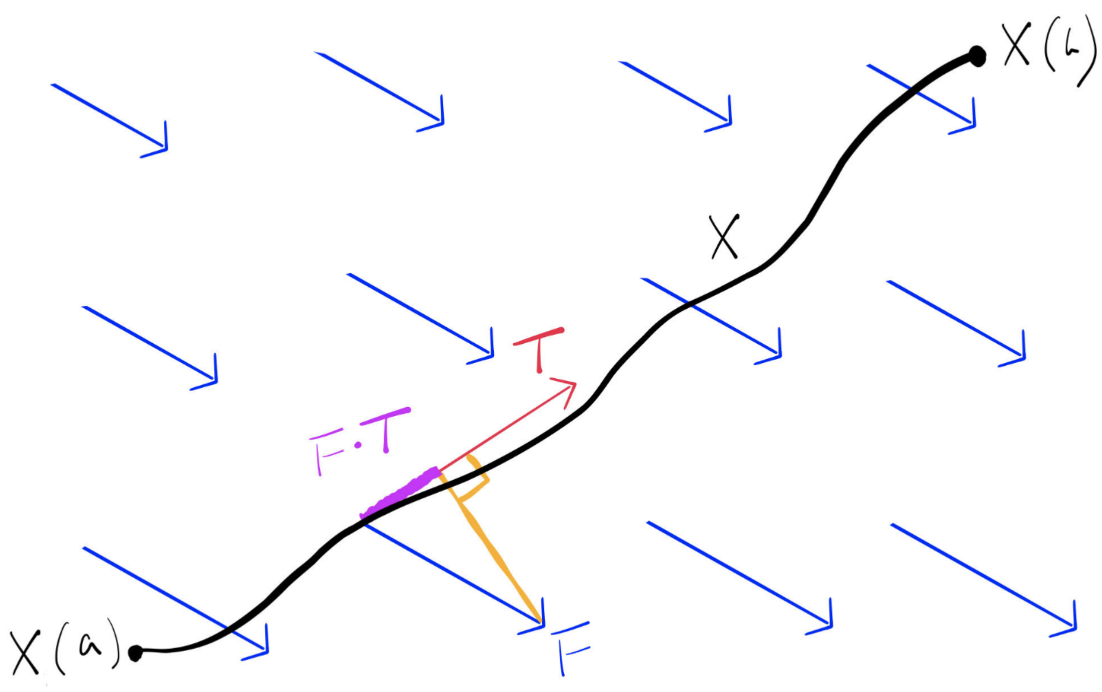
$\boxed{8}$ Du skal dra den samme tingen tre meter til bortetter gulvet, men arbeidsstillingen var litt knotete og du fikk vondt i ryggen, så du endrer stilling og bruker den samme kraften på 10 N, men nå med førtifem graders vinkel oppover istedet. Hvor stort arbeid har du utført etter denne operasjonen?

I det virkelige liv er det mer komplisert. For det første kan kraften være forskjellig fra sted til sted i rommet, og for det andre kan retningen på kurven og retningen på kraften variere i forhold til hverandre. Det er kun kraftfeltets tangentielle komponent til kurven

$$F^T T = \frac{F^T \dot{x}}{|\dot{x}|}$$

som gjør arbeid - all kraft som står normalt på fartsretningen er irrelevant. For å finne det totale arbeidet må du linjeintegrere kraftens tangentielle komponent til kurven. Dette kalles **linjeintegralet til F over Γ**, er definisjonen på arbeidet gjort av kraften F, og skrives slik:

$$W = \int_\Gamma F \cdot ds = \int_a^b F(x(t))^T T(t)\, |\dot{x}(t)|\, dt = \int_a^b F(x(t))^T \dot{x}(t)\ dt$$



$\boxed{9}$ En husflue (Musca Domestica) flyr langs en rett linje fra gulvet opp til kontorpulten og setter seg på den. Det er én meter opp og tre meter bort, og fluen veier 18 milligram. Hvor stort arbeid har tyngden gjort på fluen på denne trajektorien?

$\boxed{10}$ En dykker har ertet på seg en steinbit rett utenfor en elvemunning. Steinbiten svømmer oppover langs den sirkulære heliksen fra oppgave 14 i økt 3-1 mens den blir utsatt for en bortadgående laminær vannstrøm. Vannstrømmen utøver en kraft på steinbiten gitt ved

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finn arbeidet vannstrømmen gjør på steinbiten.

I oppgavene over er det spurt etter arbeidet som gjøres av en bestemt kraft, men det har ligget andre krefter og lurt i bakgrunnen; for eksempel sa jeg ingenting om hvorvidt det var friksjon eller luftmotstand eller andre ting som dissiperer energi.[2] Nå skal vi være litt mer spesifikke og anta at F er netto kraft på en partikkel, slik at Newtons andre lov

$$F = m\ddot{x}$$

gir oss partikkelens trajektorie x. Partikkelens kinetiske energi er gitt ved $E(t) = \frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2$.

$\boxed{11}$ Vis at

$$E(b) - E(a) = \int_a^b F(x(t))^T \dot{x}(t)\ dt.$$

Hva blir farten til klossen i oppgave 7 og 8 dersom vi antar at din kraft er den eneste som påvirker klossen i fartsretingen og at klossen var i ro når du startet?

Det som er lurt å vite om arbeid, er at noen ganger slipper du faktisk å beregne integralet. Det er derfor jeg plaget deg med gradientfelter i forrige økt. Grunnen til at et vektorfelt sies å være konservativt dersom det er gradienten til et skalarfelt, er at det korresponderer til fysikernes ide om konservativt kraftfelt. Dersom netto kraft er gitt ved $F(x) = -V'(x)^T$, gir kjerneregelen en enkel formel for arbeidet.

$\boxed{12}$ Vis at $E(b) + V(x(b)) = E(a) + V(x(a))$.

Tyngdekraften er som kjent konservativ, uansett om du bruker Newtons gravitasjonslov eller forenklingen vi alle opplever til daglig på Gløshaugen. Skal du langt ut i solsystemet, er det viktig å beregne arbeidet du må gjøre med eller mot tyngden, så det er praktisk at tyngden er konservativ.[3]

$\boxed{13}$ En partikkel med masse på en kilo farer rundt i $\mathbb{R}^3$ kun påvirket av tyngdekraften fra en partikkel med masse på ett tonn. Den lette partikkelen reiser gjennom punktet $(1, 1, 1)^T$ og har kinetisk energi på en joule. Litt senere reiser den gjennom $(2, 2, 2)$. Hva er den kinetiske energien der?

[2]Jeg anbefaler å lese historien om Eulers spektakulære fontenefadese:
https://link.springer.com/article/10.1007/s004070200054

[3]Eller nært. En av de minst studerte planetene i solsystemet er faktisk Merkur. Grunnen er at den sitter så tett på solen. Banefarten er mye høyere enn vår, overflaten steker på 500 grader, og det er mye jobb å håndtere solens sterke gravitasjonsfelt:
https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_assist
https://en.wikipedia.org/wiki/Mercury_(planet)

I oppgaven over gjelder det å forstå at tyngdepotensialet

$$V(x) = \frac{GMn}{|x|},$$

gir deg alt du trenger av informasjon; du bare evaluerer V i $(1,1,1)^T$ og $(2,2,2)^T$. Det samme nyttiggjør vi oss i elektrostatikken, siden couloumbkraften

$$F(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3}$$

er identisk med gravitasjon sett fra matematikkens ståsted, og følgelig konservativt. Det samme gjelder for det elektriske feltet

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3}$$

som er kraften på en tenkt enhetsladning. I elektrostatikk er det vanlig å bruke ϕ for potensialet:

$$E(x) = -\phi'(x)$$

og vi skriver

$$\phi(x(b)) - \phi(x(a)) = -\int_\Gamma E \cdot ds$$

for arbeidet med å flytte en enhetsladning mellom $x(a)$ og $x(b)$.[4]

$\boxed{14}$ Finn uttrykket for V. Hva slags benevning har potensialet?

Termodynamikken er gjennomsyret av ideen om konservative vektorfelt. Istedet for at skrive at trykk er en funksjon av temperatur og volum slik:

$$p = f(T, v)$$

skriver de at gradienten til trykket er et konservativt vektorfelt, men med litt annen notasjon:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T dv$$

For en matematiker fremstår dette som noe tungvint, men de har sine grunner.

$\boxed{15}$ Hvis du vil få en ide om termodynamikk og linjeintegraler, kan du prøve oppgave 6.1 her: `https://folk.ntnu.no/vegargje/Mattepilot_MTKJ/matte3_kjemi.pdf`

Trenger du regneoppgaver for å trene på linjeintegraler, kan du gjøre oppgavene i kapittel 10.6 (linjeintegraler over skalarfelt) og 11.2 (linjeintegraler over vektorfelt) i Arnes bok.

[4] I praksis kan man ikke gjøre dette, for hvis ladningen akselereres, genererer den et magnetfelt og så blir ikke kraften konservativ lenger og så blir arbeidet feil.

UKENS NØTTER

Det vanlige spørsmålet i klassisk fysikk er "hva slags trajektorie x får en ting med masse m om du slipper den løs i kraftfeltet $F(x)$?". Dette innebærer å løse Newtons andre lov

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t))$$

for x. Jeg skrev kraft som

$$F(x)$$

over, men det er egentlig riktigere å skrive

$$F(x, \dot{x})$$

altså en funksjon fra $\mathbb{R}^6$ til $\mathbb{R}^3$, for det er ikke uvanlig at kraft avhenger av farten til partikkelen. For eksempel har luftmotstand en tendens til å gå som kvadratet av farten.

$\boxed{1}$ En bil kjører starter med enhetsfart og kjører en runde rundt enhetssirkelen, i fri rulling slik at den eneste kraften i fartsretningen er luftmotstanden, som du kan anta er

$$F(\dot{x}) = -a\left|\dot{x}\right|^2.$$

der $a > 0$ er en proporsjonalitetskonstant. Finn det totale arbeidet luftmotstanden gjør på hele runden.
(Her må du først løse en difflikning for farten, og så må du nok til med numerisk integrasjon.)

$\boxed{2}$ La oss spille litt golf. Ballen ligger i ro i origo, og så får den en impuls rettet $\pi/4$ radianer oppover. Ballen er kun påvirket av tyngden og luftmotstanden, som antas kvadratisk med banefarten:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_(physics)`
Friksjonskraften bllir

$$F(\dot{x}) = -a|\dot{x}|^2 T = \dot{x}|\dot{x}|$$

slik at

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_1(t)|\dot{x}(t)| \\ m\ddot{x}_2(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_2(t)|\dot{x}(t)| - g \end{aligned}$$

Løs numerisk, og estimer arbeidet luftmotstanden gjør på ballen under reisen.
(Hint: hvis du klarte begge golfoppgavene over, klarer du nok å oversette diracpulsen til initialverdier.)

$\boxed{3}$ Det kan være vind også. La oss gå videre til tre dimensjoner, og sette på den konstante vindretningen y. Forklar at dersom $y_3 = 0$ (vind går som regel nogenlunde parallelt med bakken) blir systemet

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= \delta(t) - a(\dot{x}_1(t) - y_1)|\dot{x}(t) - y| \\ m\ddot{x}_2(t) &= \delta(t) - a(\dot{x}_2(t) - y_2)|\dot{x}(t) - y| \\ m\ddot{x}_3(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_3(t)|\dot{x}(t) - y| - g \end{aligned}$$

Løs numerisk, og se hvor ballen lander for forskjellige vindretninger.

Men nå er vi kommet til et viktig punkt i den matematiske fysikken, nemlig det at kraft kan integreres på to forskjellige måter - med hensyn på tid og med hensyn på strekning. Kraft integrert over et tidsintervall gir en impuls, altså endring i bevegelsesmengde. Men kraft integrert over strekning gir arbeid, altså endring i energi.