

## 3 - 4 - VÆR OG VIND OG KRAFT

Funksjoner fra  $\mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}^n$ . kalles i noen tilfeller **vektorfelt** og i andre tilfeller **koordinattransformasjoner**. Disse har litt forskjellig geometrisk tolkning. I denne økten skal vi fokusere på den første. Vi har allerede sett vektorfelt gjennom matrise-vektorproduktet

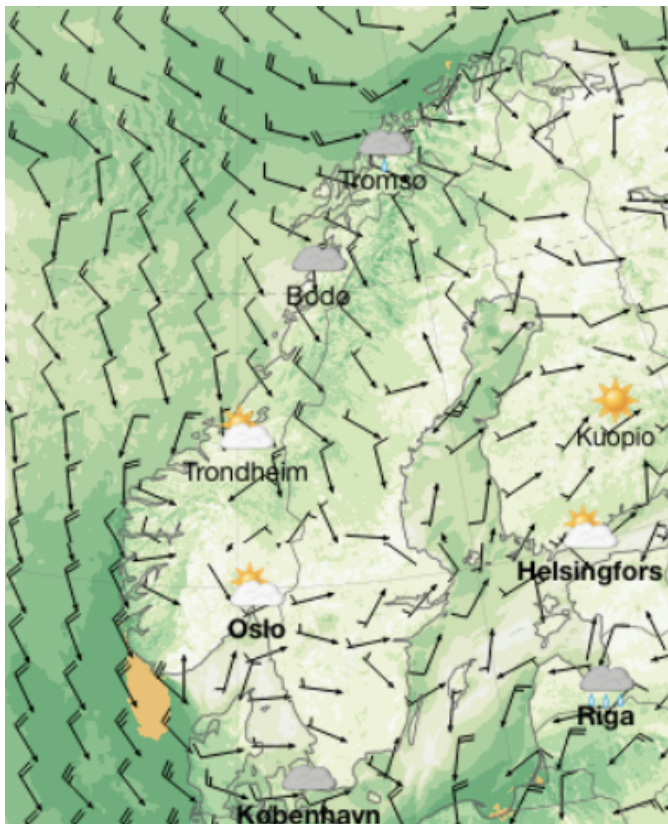
$$f(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

og gjennom gradienten

$$f' = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

til et skalarfelt. Den klassiske tolkningen er **flyt**, slik som vindpilene på værkartet, der du putter inn en vektor med to komponenter (lengde- og breddegrad) og får ut en vektor med to komponenter (vindretning med vindstyrke), og så gir plottet en ide om vindflyten. I matematikk og fysikk bruker vi lengde på pilene for å indikere vindstyrken, mens i værkart bruker man retningen til å indikere vindretning, og en spesiell hake på enden av pilen for å indikere vindstyrke.

1] Hva er vindstyrken i Tromsø på kartet under?<sup>1</sup>



<sup>1</sup><https://hjelp.yr.no/hc/no/articles/360002022134-Vindpiler-og-Beaufortskalaen>

<https://www.yr.no/artikkel/her-ser-du-verdas-vindar-akkurat-no-1.11584952>

Det er ellers alltid et sted der det er vindstille: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hairy\\_ball\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Hairy_ball_theorem)

En av de viktigste anvendelsene er innen differensiallikningssystemer. Løsningen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  til

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

der  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kalles **strømlinjene** til  $f$ . Det mest naturlige eksemplet på strømlinjer i Norge er antagelig skuringsstripene etter istiden, tenk at  $f$  angir isbreens fart i hvert punkt, og så er skuringsstripen  $\Gamma$  parametrisert av  $x$ . Et mer matematisk eksempel er lotkavolterrasystemet, der

$$f(x) = \begin{pmatrix} ax_1 - bx_1x_2 \\ -cx_2 + dx_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Et plot av  $f$  kan gi en idé om oppførselen til systemet selv uten en eksplisitt formel for løsningen. Matplotlibs funksjonalitet for dette heter "quiver".<sup>2</sup>

- 2] Løs numerisk med symplektisk euler, og plott noen løsninger i samme figur som vektorfeltet. (Du finner kode her: <https://folk.ntnu.no/mortano/lotkavolterra> )

Det er vanlig å drille ingeniørstudenter i å skissere strømlinjene til systemer på formen

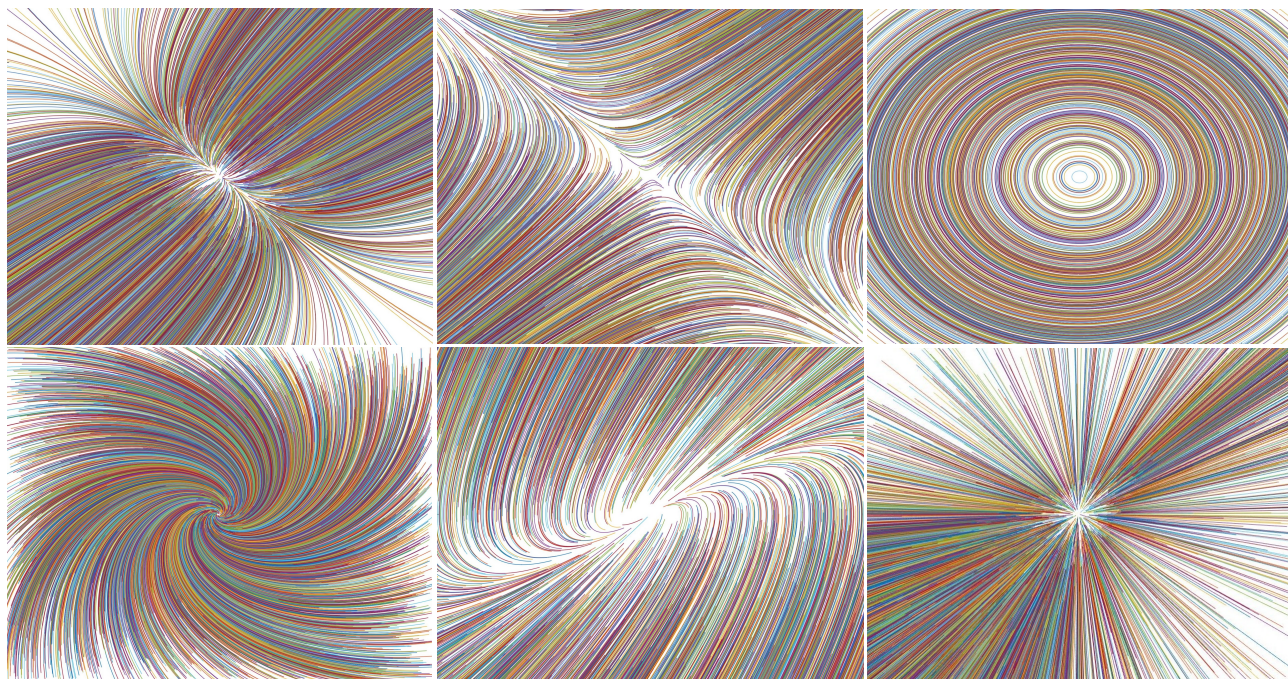
$$\dot{x} = Ax$$

der  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Et plot av  $x_1$  mot  $x_2$  for forskjellige startverdier kalles systemets **faseportrett**.

- 3] Nederst på siden finner du noen faseportretter jeg laget i matlab i mine glansdager. Hvert av dem inneholder noen tusen løsninger av systemer på formen  $\dot{x} = Ax$ , der  $A$  er

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Plot  $f(x) = Ax$  for alle matrisene, og tegn inn egenvektorene. Hvilke plot korresponderer til hvilke matriser? Går løsningene innover eller utover? (Origo er midt i bildet på alle plottene.)



<sup>2</sup>[https://matplotlib.org/stable/gallery/images\\_contours\\_and\\_fields/quiver\\_simple\\_demo.html](https://matplotlib.org/stable/gallery/images_contours_and_fields/quiver_simple_demo.html)



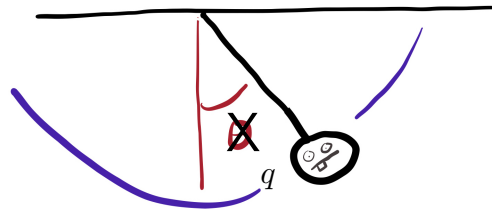
Klassisk mekanikk<sup>3</sup> introduserer vektorfelt på en naturlig måte. For å bestemme bevegelsen til en punktpartikkel må vi sette opp **bevegelseslikninger**. Foreløpig er Newtons lover den eneste teknikken du kjenner til, men det finnes andre måter å gjøre det på. Det er vanlig å kalle partikkelens posisjon for  $q$  og farten for  $p$ .<sup>4</sup> Størrelsene  $q$  og  $p$  kalles henholdsvis **generalisert posisjon** og **generalisert bevegelsesmengde**. Den fysiske posisjonen til en pendel er for eksempel gitt ved

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} l \cos \theta \\ l \sin \theta \end{pmatrix},$$

differensiallikningen er  $l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$  og vi setter  $q = \theta$  og  $p = \dot{\theta}$ .

4 Vis at

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\frac{g}{l} \sin q \end{aligned}$$



Dette systemet kan som du vet ikke løses analytisk, men vi kan hente ut informasjon allikevel.

5 Vi setter  $g/l = 1$ . Plott vektorfeltet

$$f(q, p) = \begin{pmatrix} p \\ -\sin q \end{pmatrix}$$

sammen med noen numeriske løsninger.



<sup>3</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Classical\\_mechanics](https://en.wikipedia.org/wiki/Classical_mechanics)

<sup>4</sup>Dette skyldes antagelig at  $p$  vanligvis betyr moment, og at  $q$  er bokstaven før  $p$  i alfabetet.

Pendelsystemet introduserer et viktig konsept. Dersom  $f$  er den transponerte av gradienten til et skalarfelt <sup>5</sup>, sier vi at  $f$  er et **gradientfelt**. Skalarfeltet kalles **potensialfunksjonen**. Et synonym for gradientfelt er **konservativt vektorfelt**.

- 6 Finn gradienten til funksjonen

$$L(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \cos q$$

og se på pendelsystemet igjen.

- 7 Hvilke av vektorfeltene i denne øktien er konservative? Finn potensialfunksjoner til de som er.

Dersom et vektorfelt er konservativt, blir det litt hipp som happ om du skisserer vektorfeltet eller nivåkurvene til potensialet.

- 8 Skissér gradientfeltet og nivåkurvene til skalarfeltene i foregående økt.

Funksjonen

$$L(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \cos q$$

er potensialfunksjon for pendelsystemets høyreside. Denne kalles **lagrangefunksjonen** til systemet, og fremstår som litt snodig siden den er differansen mellom kinetisk og potensiell energi. Lagrangemekanikk<sup>6</sup> består i å utlede bevegelseslikninger fra lagrangefunksjonen istedet for Newtons lover. Dette er en litt abstrakt vei inn i mekanikken. For oss gir lagrangemekanikken et eksempel på praktisk bruk av gradientfelter.

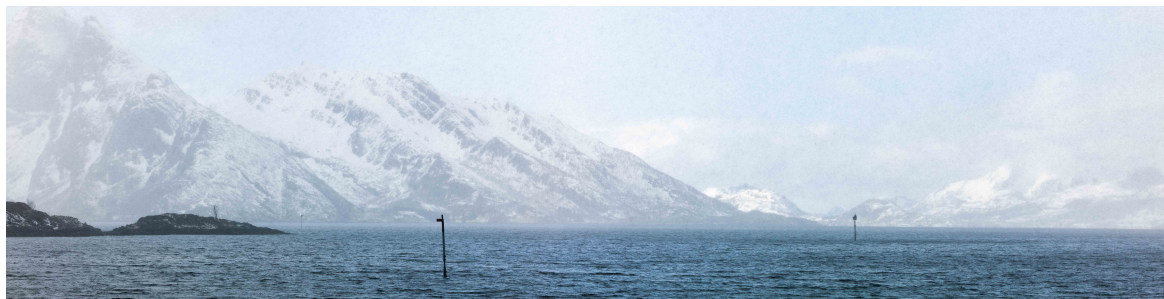
- 9 Finn lagrangefunksjonen til kloss og fjær  $m\ddot{x} = -kx$ .

Dersom vi har luftmotstand som avhenger kvadratisk av farten, blir pendelsystemet

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\frac{g}{l} \sin q - ap|p|\end{aligned}$$

der  $a$  er en konstant som avhenger av  $l$  og formen på pendelen.

- 10 Løs numerisk med og uten luftmotstand, plott i samme figur. Er vektorfeltet konservativt? (Kode her: <https://folk.ntnu.no/mortano/pendelen/>)



<sup>5</sup>husk at vi skriver vektorfelt på høykant, men gradienter liggende

<sup>6</sup><https://davidmorin.physics.fas.harvard.edu/books/classical-mechanics/>



Noen avstandsvirkende krefter har vi eksplisitte uttrykk for, og disse uttrykkene er vektorfelt. Et av dem er Newtons gravitasjonslov.<sup>7</sup> På skolen lærte du antagelig denne som

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

der  $m_1$  og  $m_2$  er massene til to ting, mens  $G$  er Newtons gravitasjonskonstant<sup>8</sup> og  $F$  den tiltrekkende kraften mellom massesentrene til  $m_1$  og  $m_2$  som sitter i avstanden  $r$  fra hverandre.

- 11 Ifølge Wikipedia er månen om lag 362 600 km unna jordens sentrum på sitt nærmeste, og 405 400 på sitt fjerneste. Regn ut kreftene i disse punktene. Hvorfor har vi springflo?

Vi skal gå et knepp videre og skrive kraftfeltet som en funksjon  $F : \mathbb{R}^3/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  gitt ved

$$F(x) = Gm_1m_2 \frac{x}{|x|^3} = \frac{Gm_1m_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Her er det ene massesenteret plassert i origo og det andre i  $x$ , slik at  $F$  blir den tiltrekkende kraften på massen i origo fra den i  $x$ . Bytter du fortegn, får du kraften fra den i  $x$  på den i origo. Gravitasjonskraften er konservativ; det var derfor jeg plaget deg med funksjonen  $u(x) = \frac{1}{|x|}$ .

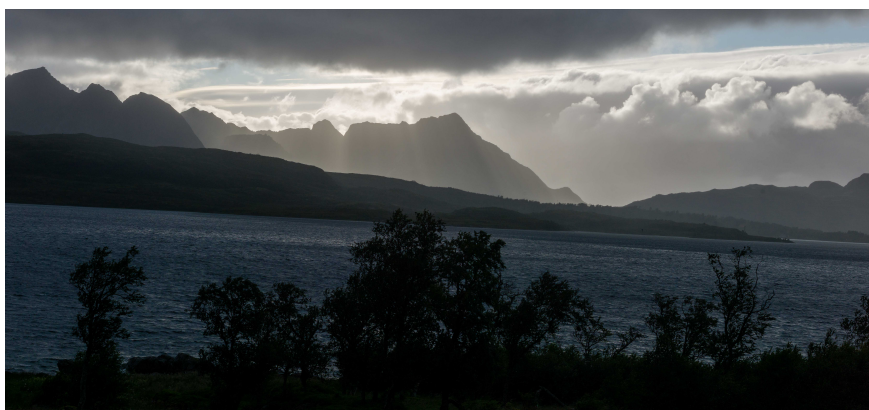
- 12 Finn gradienten til  $u$ .

Det er vanlig å dele ut den ene massen og sette opp **gravitasjonsfeltet**<sup>9</sup> til punktmassen  $m$ :

$$Gm \frac{x}{|x|^3} = \frac{Gm}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Denne har den samme tallverdien som kraften fra  $m$  på et enkilos testlodd, men benevnning N/kg. Det var Cavendish som først klarte å måle  $G$  noenlunde presist med et avansert instrument i lab.<sup>10</sup> De første forsøkene var ved å henge opp en pendel ved siden av et stort fjell.<sup>11</sup>

- 13 Gløs er stort sett flatt, så  $|x|$  er nogenlunde konstant. Hva blir gravitasjonsfeltet dersom du legger  $x_3$ -aksen rett opp fra punktet du står i? Er dette feltet konservativt?



<sup>7</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Newton's\\_law\\_of\\_universal\\_gravitation](https://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_law_of_universal_gravitation)

<sup>8</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational\\_constant](https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_constant)

<sup>9</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational\\_field](https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_field)

<sup>10</sup>[https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I\\_07.html](https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_07.html)

<sup>11</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Schiehallion\\_experiment](https://en.wikipedia.org/wiki/Schiehallion_experiment)

Tolegemesystemer (slik som jorden og månen) har alltid fem punkter i rommet der gravitasjonskreftene og sentrifugalkreftene balanserer hverandre perfekt.<sup>12</sup> Disse ligger i samme plan og kalles **lagrangepunkter**. Det er vanlig å plassere satelitter i disse, for det koster minimalt med drivstoff å holde dem på plass der - James-Webb-teleskopet sitter for eksempel i et slikt.

- 14 Ett av lagrangepunktene sitter på linjene mellom legemene. Legg jorden i origo og månen i  $(1, 0, 0)^T$  og regn ut omtrent hvor.

Om legemene hadde stått i ro, ville lagrangepunktet i oppgaven over vært det eneste, og oppgaven illustrerer noe som gjør vektorfelt komplisert å lære - realistisk modellering er umulig uten å involvere differensiallikninger. Derfor begynner man alltid studiet av elektromagnetisme med **elektrostatikk**, altså læren om krefter mellom stasjonære ladninger. Den elektrostatiske kraften fra en ladning  $q_1$  i origo på en annen ladning  $q_2$  i  $x$  kalles **coloumkraften**,<sup>13</sup> og er gitt ved

$$F(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3}.$$

Jeg håper du ser at denne kraften er matematisk sett identisk med gravitasjonskraften.<sup>14</sup> Akkurat som med gravitasjon, er det vanlig å dele ut den ene ladningen, slik at vi får **det elektriske feltet fra en punktladning**  $q$ :

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3}$$

- 15 En **dipol**<sup>15</sup> er en konfigurasjon av to motsatt ladde partikler ved siden av hverandre. Skissér vektorfeltet til en dipol med en positiv ladning i origo og en negativ i  $(1, 0, 0)^T$ . Finnes det noe lagrangepunkt?

Det er ellers veldig vanlig at flytfelt i fysikk er gradienten til et eller annet skalarfelt:

- Ohms lov for elektrisk strøm i medier med motstand:<sup>16</sup>

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla \phi$$

- Fouriers varmelov for varmekraft:<sup>17</sup>

$$\mathbf{q} = -k \nabla T$$

- Ficks lov for diffusjon:<sup>18</sup>

$$\mathbf{J} = -D \nabla \phi$$

- Darcys lov for væskeflyt i porøse medier:<sup>19</sup>

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu} \nabla p$$

<sup>12</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange\\_point](https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_point)

<sup>13</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Electrostatics>

<sup>14</sup>Men de er voldsomt forskjellig i styrke - gravitasjonskraften mellom to elektroner er omtrent en  $10^{42}$ -del av coloumbkraften mellom dem: [https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II\\_01.html](https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_01.html)

<sup>15</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Dipole>

<sup>16</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Current\\_density](https://en.wikipedia.org/wiki/Current_density)

<sup>17</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal\\_conduction](https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_conduction)

<sup>18</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Fick's\\_laws\\_of\\_diffusion](https://en.wikipedia.org/wiki/Fick's_laws_of_diffusion)

<sup>19</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Darcy>

## UKENS NØTTER

Lagranges ide om å finne en funksjon slik at vektorfeltet er et gradientfelt, er litt snodig. Kvaternionenes oppfinner William Rowan Hamilton tenkte ut noe mye mer naturlig - la heller løsningene ligge på nivåkurvene til totalenergien  $H(p, q)$  til systemet.

- 1 Finn totalenergien til pendel og kloss.  
(Hamiltonfunksjonen fant du faktisk på eksamen i TMA4101.)

Totalenergien kalles **hamiltonfunksjonen**, og vi skriver  $H(p, q)$  for denne. Både pendelen og klossen er eksempler på noe som kalles **hamiltonsk system**.<sup>20</sup>

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

- 2 Vis at løsningen  $(p, q)$  ligger på en nivåkurve til  $H$ .  
(Hint: Deriver  $H(p(t), q(t))$  med kjerneregelen.)

Grunnen til at vi kalte operatoren på høyre side av den tidsuavhengige schrödingerlikningen "hamiltonoperatoren", var at denne representerer totalenergien til partikkelen.

- 3 Finn hamiltonfunksjon for gravitasjonsfeltet fra en planet.  
4 Finn hamiltonfunksjon for van der Pols likning<sup>21</sup>  $\ddot{x} + \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$ .

Det sies ellers at komponisten Harald Sæverud hørte gjennom alle Joseph Haydns 104 symfonier med LP-spillere på 45 istedet for 33 omdreininger uten å merke at noe var galt. Dette ble visst oppklart da Sæverud ringte Jan Henrik Kayser i harnisk for å fortelle ham at hans nye innspilling av Sæveruds samlede pianoverker gikk altfor fort.

- 5 En LP-plate har diameter 12 tommer, og roterer med  $100/3$  omdreininger per minutt. Finn et vektorfelt som beskriver hastigheten til et punkt på LP-platen. Hvorfor skal du aldri under noen omstendighet sette enn 230mm kappeskive på en 125mm vinkelsliper?



<sup>20</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_system)

<sup>21</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Van\\_der\\_Pol\\_oscillator](https://en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Pol_oscillator)



Kombinerer vi Newtons andre lov med Newtons gravitasjonslov, får vi differensiallikningssystemet

$$\ddot{x} = Gm \frac{x}{|x|^3}$$

Dette kalles tolegemeproblemet og Newton selv fant ut at trajektoriene blir ellipser.

- 6] Løs numerisk. Du kan selvfølgelig prøve å utlede at  $x$  blir en ellipse, men det er ikke helt enkelt.

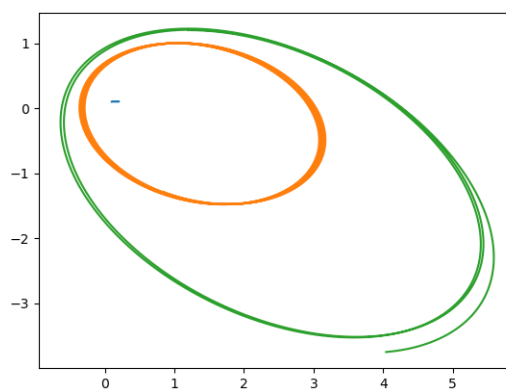
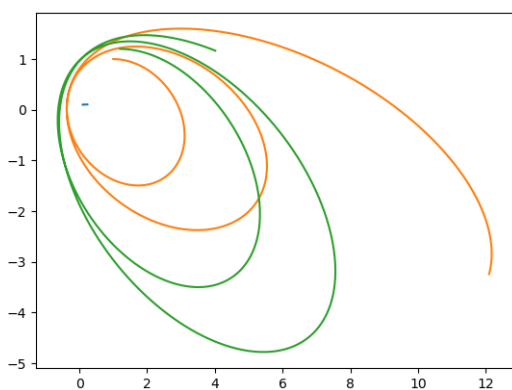
I oppgaven over er det antatt at stjernen står i ro og at planeten beveger seg. I virkeligheten beveger begge seg. Dersom posisjonen til stjernen og planeten er  $x$  og  $y$ , får vi

$$\ddot{x} = Gm_2 \frac{x - y}{|x - y|^3} \quad \ddot{y} = Gm_1 \frac{y - x}{|x - y|^3}$$

- 7] Løs numerisk. (Hvis du setter  $m_1 \gg m_2$  kan du få et realistisk scenario. Solen er omtrent 333000 ganger så tung som jorden.)

Fikk du til oppgaven over, har du sett at jorden, til tross for sin bitte lille masse, får solen til å vagge litt frem og tilbake under sin gang gjennom rommet.<sup>22</sup> Dersom det er flere enn to legemer, blir systemet umulig å løse analytisk. Det blir også kaotisk - det er umulig å spå oppførselen langt frem i tid, til tross for at solsystemet ser noenlunde stabilt ut.<sup>23</sup>

- 8] Superposisjonsprinsippet gjelder, så dersom det er flere planeter, er det bare å legge sammen kreftene og beregne trajektoriene. Prøv. En av figurene under er laget med eksplisitt euler og en med symplektisk. Hvilken er hvilken?



<sup>22</sup>Det var slik de fant Neptun, som ikke er synlig med det blotte øye. Det var noe feil på vaggingen til Uranus, og Urban le Verrier regnet ut så og si helt nøyaktig hvor en mulig planet lenger ut kunne befinne seg:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Neptune>

<sup>23</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/N-body\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/N-body_problem)