3 - 4 - VÆR OG VIND OG KRAFT

1 Kjedelige greier, “svak vind” ser det ut som på meg. Jeg liker best “sterk kuling”. Da går det for seg.

2 Du finner kode her: `https://folk.ntnu.no/mortano/lotkavolterra`

3 Dette gjør Astrid på mandag.

4 Dette er på en måte litt trivielt, likningen

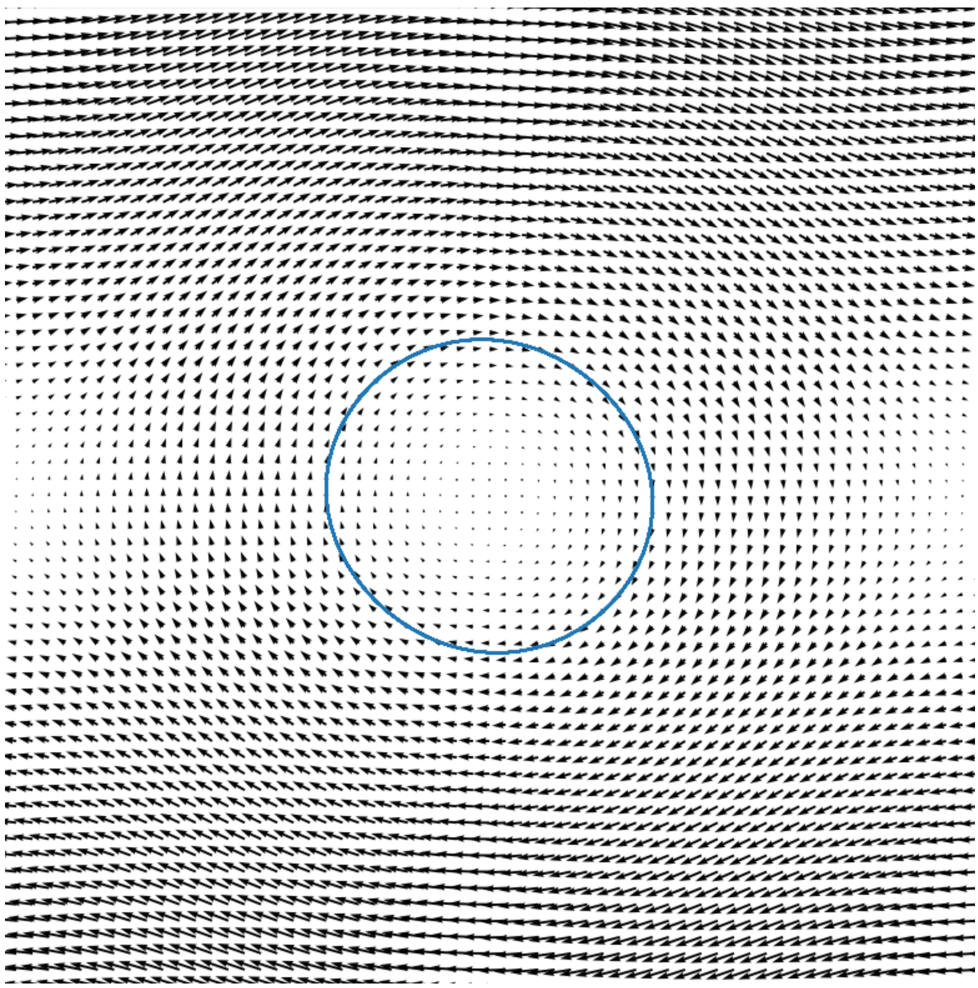
$$\dot{q} = p$$

sier bare det samme som definisjonen av p og q, mens $l\ddot{\theta} + g \sin\theta = 0$ gir

$$\dot{p} = -\frac{g}{l} \sin q$$

når du bytter ut θ med q og $\dot{\theta}$ med p.

5 Her er plot av en løsning med symplektisk euler oppå plot av vektorfeltet.



6 Gradienten til

$$L(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + \cos q$$

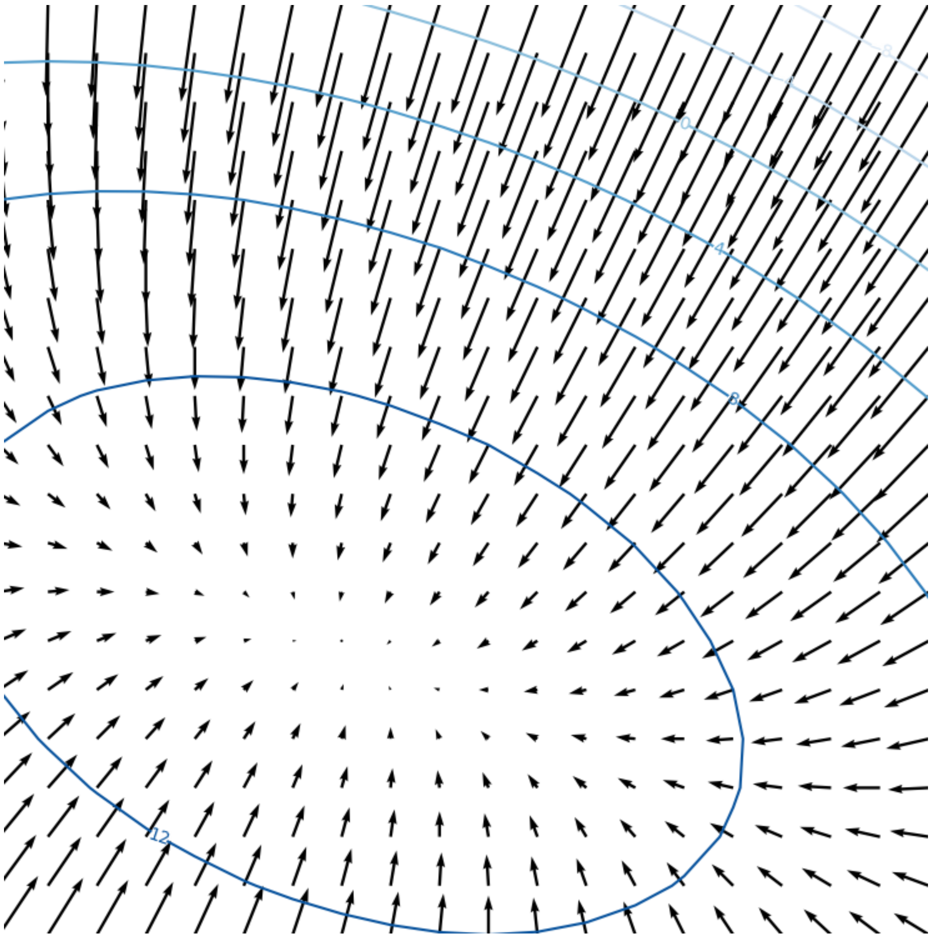
er

$$L'(p,q) = (p, -\sin q)$$

som er den transponerte til høyresiden i pendelsystemet.

7 Dette tror jeg også Astrid skal gjøre på mandag. Noen av vektorfeltene i oppgave 3 er konservative, og noen av dem er ikke.

8 Her er konturplot og gradientfeltplot av fjellet på første side i forrige økt. Merk hvordan gradientpilene står normalt på nivåkurvene.



9 Lagrangefunksjonen

$$L(p,q) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}q^2$$

har en gradient som er den transponerte til høyresiden i klossesystemet

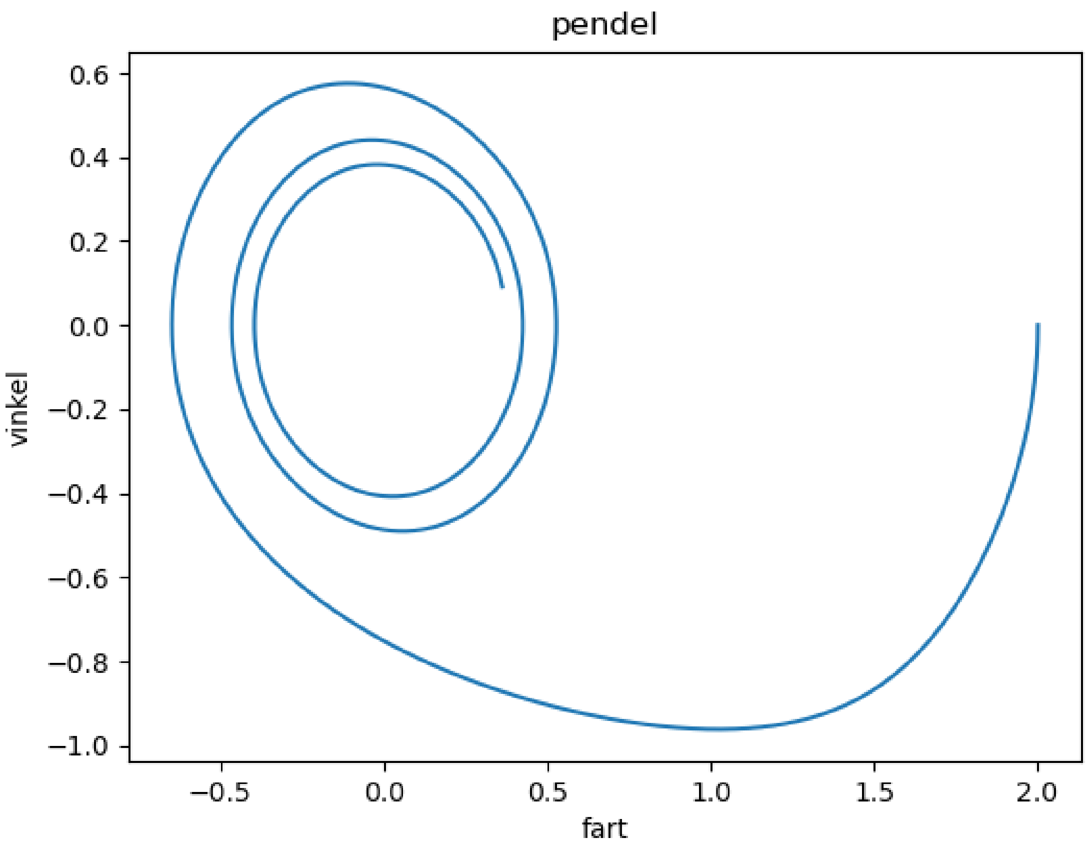
$$\begin{aligned}\dot{q} &= p\\ \dot{p} &= -q\end{aligned}$$

Dersom vi har luftmotstand som avhenger kvadratisk av farten, blir pendelsystemet

$$\dot{q} = p$$
$$\dot{p} = -\frac{g}{l}\sin q - ap|p|$$

der a er en konstant som avhenger av l og formen på pendelen.

$\boxed{10}$ Dersom du har luftmotstand eller friksjon eller sånt, kan ikke vektorfeltet være konservativt. Dette skal vi se i neste uke.



$\boxed{11}$ Det er faktisk to tidevannsbølger på jorden - en fra solen og en fra månen. Den fra månen er dominerende, men når månen, jorden og solen står på en rett linje (sånn ca ved fullmåne og ingen måne), kommer topp og bunn i disse tidevannsbølgene samtidig og så blir det lavere fjære og høy flo. Hvis du da har litt for kort fortøyning og ikke noe dragtau til land, kan båten stikke av. Det gjorde vår båt en gang. Den tok med seg hele fortøyningen og seilte av gårde! Selv en liten båt kan løfte en fortøyning på flere hundre kilo av sjøbunnen.

$\boxed{12}$ Vi husker fra økt 3-1 at

$$u'(x) = -\frac{(x_1, x_2, x_3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} = -\frac{x^T}{|x|^3}$$

så vi har altså at

$$F(x) = -Gm_1m_2u'(x)^T.$$

$\boxed{13}$ Feltet blir

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}.$$

Dette feltet er konservativt, og potensialet er $V(x) = mgx_3$, som du kjenner fra skolen.

$\boxed{14}$ Hvis vi setter massene m_1 i origo, m_3 i $(1,0,0)^T$ og m_2 i punktet $(a,0,0)^T$ der $0 < a < 1$, kan vi finne punktet der gravitasjonskreftene balanserer hverandre ved å sette opp gravitasjonskreftene på m_2 fra m_1 og m_3 lik hverandre:

$$\frac{Gm_1m_2}{a^2} = \frac{Gm_1m_3}{(1-a)^2}$$

Ganger vi opp med $a^2(1-a)^2$ og løser for a, får vi

$$a = \frac{2m_1 \pm \sqrt{m_1m_3}}{2(m_1 - m_3)}$$

der den ene løsningen gir et punkt mellom origo og $(1,0,0)^T$ der kreftene balanserer hverandre. Den andre gir et punkt bortenfor $(1,0,0)^T$ der kreftene er like store men rettet samme vei.

$\boxed{15}$ Det er ikke så lett å lage et pent plot av dette med vektorpiler, for det elektriske feltet helt inners mot ladningen blir helt ekstremt sterkt. Så her er et plot som ser veldig stygt ut og tar litt tid å bli vant med, men det lyver ikke. Ikke noe lagrangepunkt her nei.