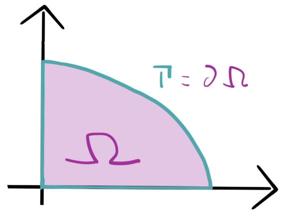
3 - 3 - OPTIMERING I

De aller fleste land har sitt høyeste punkt på toppen av et fjell. Men noen land, for eksempel Monaco og Finland, har sitt høyeste punkt et eller annet sted på landegrensen, i en oppoverbakke mot en fjelltopp som ligger i nabolandet. Kina og Nepal har på en måte begge deler, siden de deler Mount Everest. I de to foregående ukene har vi lært om funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}$ og om funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$. Nå skal vi kombinere dem for å analysere slike problemstillinger.

La oss først introdusere litt notasjon. Et område $\Omega \in \mathbb{R}^2$ formet ved å ta snittet av første kvadrant med en ellipse med halvakser 4 og 3, se figur. Hvis en kurve Γ er randen til et område Ω, skriver vi

$$\partial\Omega = \Gamma.$$



Du går en skitur langs Γ på et fjell $h : \Omega \to \mathbb{R}$. gitt ved

$$h(x, y) = -x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 8.$$

I forrige semester lærte vi å finne toppen av fjellet. Spørsmålene vi skal svare på denne uken, er

1: Hvordan vet vi at et kritisk punkt er toppen av et fjell og ikke bunnen av en dal?

2: Hva er det høyeste og laveste punktet på skituren?

La oss begynne med litt repetisjon.

$\boxed{1}$ Finn toppen av fjellet gitt av h.

Det finnes fire andrederiverte. Hvis du partiellderiverer to ganger med hensyn på én variabel, får du de **rene** annenordens partiellderiverte:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_1^2} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f^2}{\partial x_1^2},$$

Deriverer du med hensyn på én variabel og så med hensyn på den andre, får du de **blandede**:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f^2}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

De to siste er som regel identiske, men det finnes patologiske eksempler der de ikke er det; dette skal vi se på senere. Det er vanlig å sette opp de andreordens deriverte i **hessematrisen**:

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ Finn hessematrisen til fjellet h.

I hessematrisen finner vi all info om hvorvidt et kritisk punkt er topp eller bunn.

$\boxed{3}$ Finn fram til Taylors andreordens formel for en funksjon fra $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\,h + h^T f''(x) h$$

ved å sende en rett linje gjennom x i retning h og bruke kjerneregelen.

Hessematrisen er som regel symmetrisk og følgelig som regel ortogonalt diagonaliserbar.

$\boxed{4}$ Forklar hvorfor vi nå trenger å vite om hessematrisen er positivt eller negativt definitt eller ingen av delene, og vis at funksjonen h på første side har et toppunkt i $(3/7, 1/7)^T$ og ikke et bunnpunkt eller en sadel.

Monaco og Finland har sitt høyeste punkt i en oppoverbakke langs landegrensen, og hvis du ønsker å finne det høyeste punktet på skituren på første side, hjelper det ikke å finne toppen av fjellet, for skituren går ikke innom der. Her har du to valg, enten kan du parametrisere Γ, sette inn i uttrykket for h, og så derivere med hensyn på t og sette lik null og så videre slik du gjorde på skolen,

$\boxed{5}$ Prøv dette. Du må sette opp parametriseringer for alle de tre bitene av Γ.
(Den krumme delen vil gi opphav til en likning som ikke er helt god å løse med penn og papir, så du blir nok nødt til å kjøre envariabel Newtons metode.)

eller du kan prøve noe som kalles **Lagranges multiplikatormetode**.[1] La oss si at du går på fjellet gitt av $z = f(x)$ og at gps-sporet ditt er gitt av en kurve med likning $g(x) = C$. I figuren under er en person ute og går sin foretrukne søndagstur i Ogndalen. Ekvidistanselinjene på kartet er de brune nivåkurvene til f, og vedkommende går en tur gitt av den rosa kurven.

$\boxed{6}$ Forklar ved hjelp av figuren at for det høyeste punktet på turen, bør gradientene til f og g være parallelle, og at dersom nivåkurvene er glatte, finnes det i dette punktet en konstant λ slik at

$$f'(x) = \lambda g'(x).$$

(Se nøye på ekvidistanselinjene, og husk at gradienten står normalt på nivåkurvene. Jeg har tegnet inn gradientene til f og g i to forskjellige punkter for å illustrere.)

$\boxed{7}$ Prøv oppgave 6 på nytt med Lagranges mutliplikatormetode.

Du kan også tenke på Lagranges multiplikatormetode som å lete etter kritiske punkter til

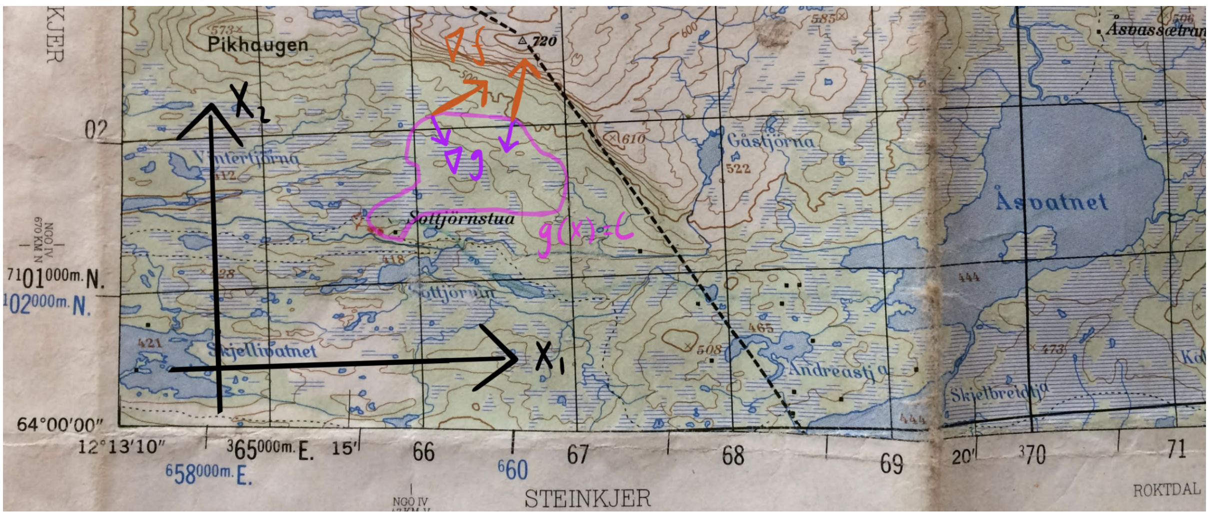
$$L(x) = f(x) + \lambda g(x).$$

$\boxed{8}$ Hvorfor det?

$\boxed{9}$ Du går på elliptisk skitur på fjellet $h(x) = 1 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$, langs trajektorien gitt ved ellipsen med likning

$$x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} = 1.$$

Finn turens høyeste punkt.



[1]https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier

$\boxed{10}$ En ellipse med halvakser $a = \frac{1}{2}$ og $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, rotert $\pi/4$ radianer i forhold til koordinataksene, tilfredsstiller likningen

$$6(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)^2 = 3.$$

Finn den største verdien til

$$f(x) = x_1 + 2x_2$$

på ellipsen.

Sjekk også oppgave 1d på fjorårets kont, og 1a på fjorårets ordinær. Du finner alt her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/eksamen/`
Sjekk også ut TMA4105 sine optimeringsoppgaver her:
`https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/2024v/interaktiv_5.pdf`
`https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/2024v/plenumsregning_5.pdf`
`https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/2024v/lf_anbefalte_5.pdf`
samt oppgavene i Arnes bok kapittel 9.8 og 9.20.

UKENS NØTTER

Sporet til en kvadratisk matrise er summen av diagonalelementene.

$\boxed{1}$ Hva er sporet til hessematrisen til en harmonisk funksjon?

For å forklare at hessematrisen gir info om kritiske punkt, er det nyttig å vite at den er symmetrisk. Men det finnes altså patologiske tilfeller der den ikke er det.

$\boxed{2}$ Finn hessematrisen til

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

i $x = 0$.

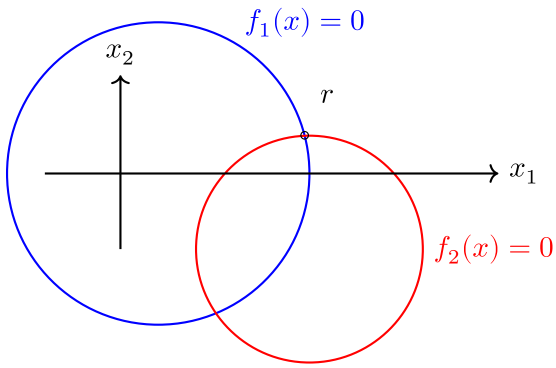
I det virkelige liv må man stort sett jobbe numerisk. Har du skjønt tangentplanene, har du i prinsippet alt som trengs for å forstå **Newtons metode**

$$x_{k+1} = x_k - \Big(f'(x_k)\Big)^{-1} f(x_k)$$

for løsning av det ikkelineære likningssettet

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Her betyr x_k iterasjon k, altså en vektor i $\mathbb{R}^{2\times 1}$.



$\boxed{3}$ I oppgave 5 i økt 3-1 regnet du faktisk ut et newtonsteg fra initialgjetningen $x_0 = (1,1)^T$ når du fant skjæringspunktet mellom nullnivåkurvene til tangentplanene. Finn skjæringspunktene mellom sirklene numerisk.

$\boxed{4}$ Finn skjæringspunktene mellom de to ellipsene

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - x_2 = 1 \qquad \text{og} \qquad x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 - x_1 - 2x_2 = 1.$$

Newtons metode er en teknikk for å løse ikkelineære likningssett, men også en teknikk for å finne kritiske punkter til skalarfelt. Det er derfor Newtons metode hører hjemme i denne økten.

$\boxed{5}$ Finn og klassifiser de kritiske punktene til

$$V(x) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 2x_2^3 - x_1^2 - x_2^2 - x_1 x_2 - x_1 - x_2.$$