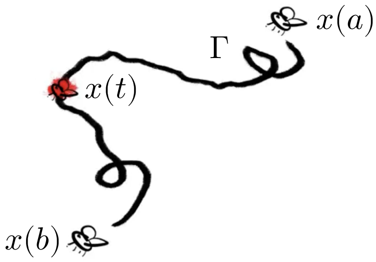
TMA4101/4106/4111/4121

3 - 2 - FLUENS STOLTE GANG OVER RULLEGARDINEN

En av de første tingene du på skolen lærte om grafen til $y = f(x)$, var at den ikke kan ta en piruett og skjære seg selv, for i såfall er ikke f en funksjon. Derfor er det noen begrensninger på hvor artige figurer man kan tegne med funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. Med funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$ blir alt mye morsommere. [1] Vi skriver $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ som en kolonnevektor:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$



Grafen til x kalles ofte Γ (stor gresk gamma). Dersom $n = 2$ kan du tenke på Γ som som trajektorien til en flue som spaserer over rullegardinen, og når $n = 3$ surrer fluen rundt i rommet. På skolen kalte du det parametrisert kurve, og vi har allerede drevet med det litt. Finn og skissér parametrisering for skjæringskurven mellom

$\boxed{1}$ $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ og $x_1 + x_2 = 0$

$\boxed{2}$ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ og $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

$\boxed{3}$ $x_1^2 + x_2^2 = 1$ og $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$\boxed{4}$ $x_1^2 + x_2^2 = x_3$ og $x_1 + x_2 = 0$

Trikset med å skjønne nye funksjoner er ofte å herje litt med funksjoner du har i ryggraden. Funksjonen $x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

er en klassiker; den gir oss enhetssirkelen. Den kjenner alle barn i barnehagen, så den duger som bånnsville for vårt videre arbeid.

$\boxed{5}$ Finn parametriseringer for sirklene i oppgave 7 i forrige ukes økt.

$\boxed{6}$ Finn en parametrisering for en ellipsen som tilfredsstiller

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

og finn skjæringskurven mellom $2x_1^2 + x_2^2 = 1$ og $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Vi kan rotere grafer med **rotasjonsmatrisen**. Dette er en funksjon $R : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ gitt ved

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

$\boxed{7}$ Finn en parametrisering for en ellipse som ligger med førtifem graders vinkel på koordinataksene.

[1] https://www.wolframalpha.com/input/?i=random+logo+curve

Når det bare er én uavhengig variabel sier vi **tangenten** istedet for jacobimatrisen, og den er

$$x'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Dersom tangenten eksisterer, sier vi at x er deriverbar. Definisjonen impliserer at

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Dersom x er en posisjon og t er tid, skriver vi av og til

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

istedet. Hvis man tenker at x er trajektorien til en flue og fluen har speedometer, er **banefarten**

$$\|x'(t)\| = \sqrt{x'(t)^T x'(t)} = \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 + \cdots + (x_n'(t))^2}$$

det tallet som vises på speedometeret ved tiden t.

$\boxed{8}$ Finn tangent og banefart for alle kurvene på forrige side.

Buelengden til Γ finner du ved å integrere speedometerfarten:

$$\int_\Gamma ds = \int_a^b \|\dot{x}(t)\|\, dt$$

$\boxed{9}$ Bruk din forståelse av riemannsummer til å forklare at integralet over blir buelengden til kurven, og regn ut lengden til $x : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \ln(1+t^2) \\ 2\arctan t \end{pmatrix}.$$

$\boxed{10}$ Regn ut omkretsen av en ellipse med halvakser 3 og 4. (Bruk numerisk integrasjon.)

Du kan parametrisere en kurve Γ på mange måter. Men det er en som er litt spesiell, **buelengdeparametriseringen**. Dette er den parametriseringen der t er buelengden til kurven. Denne er som regel vanskelig eller umulig å finne et eksplisitt uttrykk for, men regnes som den mest "naturlige" parametriseringen, og brukes ofte i teoretiske utgreininger.

$\boxed{11}$ Den sirkulære heliksen er gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

Finn tangenten, banefarten, buelengden og buelengdeparametriseringen.

For funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$ blir ordet glatt brukt i en litt annen betydning enn vi er vant til.

$\boxed{12}$ Skisser funksjonen $x : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Eksemplet over er litt vittig. Komponentene $x_1(t) = t^2$ og $x_2(t) = t^3$ er glatte (i den forstand vi lærte om på tampen av forrige semester), men kurven er ikke glatt i origo. Det som skjer er at banefarten er null når $t = 0$, og da kan alt skje. Hvis fluen stopper helt opp, kan den begynne å kjøre en annen vei når den begynner å fly igjen, og da kan kurven få en knekk. **Enhetstangentvektoren** ved tiden t er gitt ved

$$T(t) = \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|}.$$

$\boxed{13}$ La x være funksjonen fra forrige oppgave, og vis at

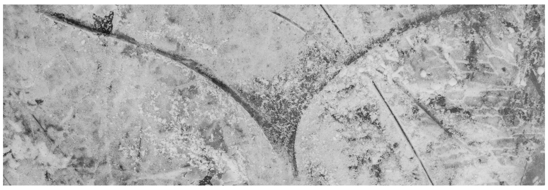
$$\lim_{t\to 0^+} T(t) \neq \lim_{t\to 0^-} T(t)$$

Vi sier at en funksjon fra $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ er **glatt** i t dersom enhetstangentvektoren eksisterer og dreier på et kontinuerlig vis etterhvert som vi beveger oss langs kurven. En tilstrekkelig, men ikke nødvendig betingelse for dette er at komponentfunksjonene er deriverbare og $\|\dot{x}(t)\| \neq 0$.

$\boxed{14}$ Hva med

$$x(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 \end{pmatrix}?$$

$\boxed{15}$ Hva har skjedd her?



Enhetsnormalvektoren er gitt ved

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Definisjonen av enhetsnormalvektoren ser litt rar ut, men motiveres av følgende oppgave.

$\boxed{16}$ Vis at $T'(t)$ stort sett står normalt på $T(t)$.
(Hint: deriver likningen $T(t)^T T(t) = 1$.)

Størrelsen

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t) \times x''(t)|}{\left(\sqrt{x'(t)^T x'(t)}\right)^3}$$

kalles kurvens **krumning**. Dersom x er en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^3$ er **binormalvektoren** kryssproduktet mellom T og N:

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$

mens

$$\tau(t) = \frac{\left(x'(t) \times x''(t)\right)^T x'''(t)}{|x'(t) \times x''(t)|}$$

kalles **torsjonen**. Enhetstangenten, enhetsnormalen og enhetsbinormalen danner en under noen milde betingelser på x en fin basis for $\mathbb{R}^3$ som kalles **frenetrammen**.[2]

$\boxed{17}$ Finn enhetstangent, enhetsnormal, binormal, krumning og torsjon til alle funksjonene så langt i økten. Noen av dem er håpløse å regne ut for hånd, så se hvor langt du kommer.

[2]`https://en.wikipedia.org/wiki/Frenet-Serret_formulas`

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ Vis at krumningsradien til x kan skrives

$$R(t) = \frac{\|\dot{x}(t)\|^3}{|\ddot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\ddot{x}_2(t)|}.$$

$\boxed{2}$ En ellipse med halvakser rotert $\pi/4$ radianer i forhold til koordinataksene tilfredsstiller likningen

$$\frac{(x+y)^2}{2a^2} + \frac{(x-y)^2}{2b^2} = 1.$$

Vis at kurven parametrisert ved

$$x(t) = (\cos t, \cos(t+\phi))$$

ligger på en slik ellipse.

$\boxed{3}$ Har kurven gitt ved

$$x(t) = 4t^3, \qquad y(t) = 3t - \sin(3t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

en veldefinert tangent i origo?

$\boxed{4}$ Hva slags kurve blir dette:

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad t \in \mathbb{R} \quad ?$$

Dersom du på et eller annet tidspunkt ønsker å forstå hvorfor initialverdiproblemet

$$\dot{x} = Ax \qquad x(0) = x_0$$

har en og bare løsning (dette er litt komplisert), kan det være lurt å gjøre følgende oppgave.

$\boxed{5}$ La oss anta at vi har to funksjoner

$$x_1 = v_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{og} \quad x_2 = v_2 e^{\lambda_2 t}.$$

der $\lambda_1 \neq \lambda_2$ er egenverdiene til en matrise, med korresponderende egenvektorer v_1 og v_2.

Vis at $x_1(t)$ og $x_2(t)$ er lineært uavhengige for alle t. Er x_1 og x_2 lineært uavhengige?

Det finnes selvfølgelig massevis av regneregler. Dersom $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ og $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er deriverbare med hensyn på t, er

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x(t) + y(t)) &= x'(t) + y'(t) \\
\frac{d}{dt}(\lambda(t)x(t)) &= \lambda'(t)x(t) + \lambda(t)x'(t) \\
\frac{d}{dt}(x(t)^T y(t)) &= x'(t)^T y(t) + x(t)^T y'(t) \\
\frac{d}{dt}(x(t) \times y(t)) &= x'(t) \times y(t) + x(t) \times y'(t) \\
\frac{d}{dt} x(\lambda(t)) &= \lambda'(t) x'(\lambda(t))
\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Utled.

7 En reell spole har både motstand og kapasitans, i tillegg til induktans. Motstanden er blant annet avhengig spolens fysiske dimensjoner, for eksempel lengden på lederen er som spolen er laget av. Lederen i en spole er parametrisert av

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 20\pi$$

Finn spolens totale lengde. Finn den totale motstanden i spolen er laget av, dersom det er en 12 AWG kobbertråd og lengden er i meter.[3]

8 Fresnelintegralene er definert ved

$$C(t) = \int_0^t \cos^2\left(s^2\right)\, ds$$

og

$$S(t) = \int_0^t \sin^2\left(s^2\right)\, ds$$

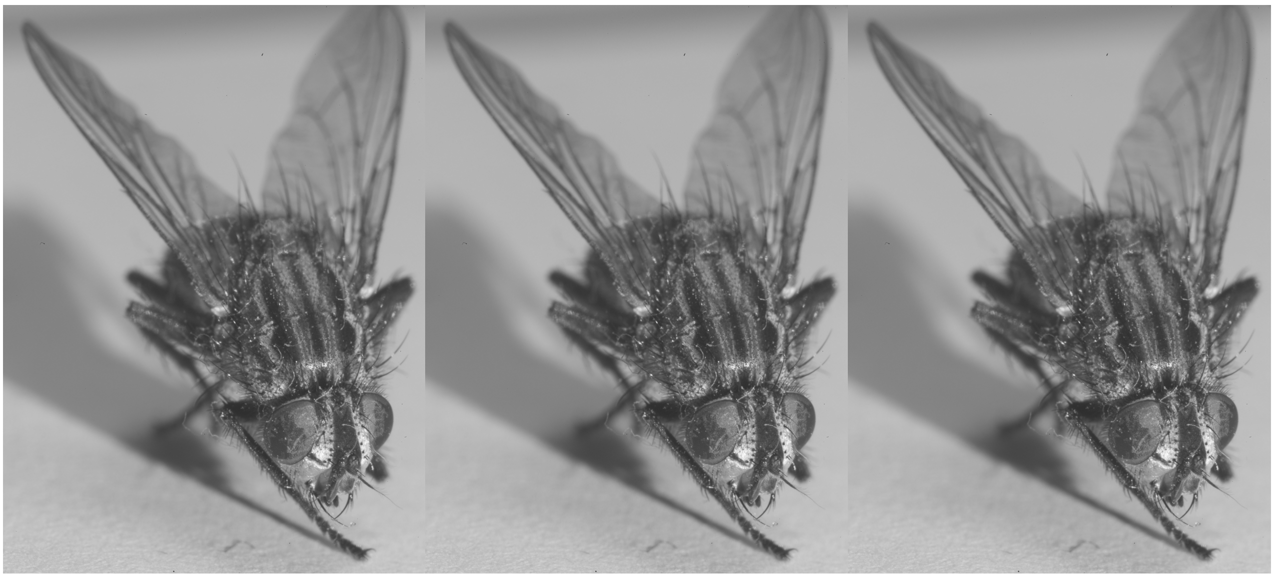
Disse dukker opp i forbindelse med optikk. Nå brukes de visst mest til å lage klotoider i rundkjøringer, for den parametriserte kurven

$$x(t) = \begin{pmatrix} C(t) \\ S(t) \end{pmatrix}$$

har spesielt pen krumning. Kurven kalles Eulerkurven.

Regn ut buelengden og krumningen og plot i python.
(Hvis du lurer på hvordan du skal evaluere integralene, kan du bruke en teknikk fra TMA4101. Sett inn taylorrekker for de trigonometriske rekkene og integrer ledd for ledd. Disse rekkene konvergerer bra fort, og python regner lett ut et par hundre ledd på en to tre.)

9 Vis at buelengden er uavhengig av parametriseringen.



[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_resistivity_and_conductivity