3 - 2 - FLUENS STOLTE GANG OVER RULLEGARDINEN - LF

$\boxed{1}$ Vi trekker likningen $x_1 + x_2 = 0$ fra $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ og får $x_3 = 1$, og ser at alle vektorer på formen

$$x(t) = \begin{pmatrix} s \\ -s \\ 1 \end{pmatrix}$$

passer i likningssystemet. Dette er jo en rett linje, og derfor kalles gjerne det å sette opp løsningsvektoren "å parametrisere løsningsrommet".

$\boxed{2}$ Denne kan du løse omtrent på samme måte.

$\boxed{3}$ Her er det antagelig lurt å vite at $x : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

er en finfin parametrisering av enhetssirkelen, og passer derfor i likningen $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Den siste komponenten finner vi ved å skrive $x_3 = -x_1 - x_2$, slik at

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -\cos\theta - \sin\theta \end{pmatrix}$$

er en parametrisert kurve som passer i begge likninger.

$\boxed{4}$ Dersom vi setter $x_1 = s$ og $x_2 = -s$, har vi noe som passer i likningen $x_1 + x_2 = 0$ og setter vi

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2 = 2s^2,$$

slik at

$$x(t) = \begin{pmatrix} s \\ -s \\ 2s^2 \end{pmatrix}$$

er det gudd.

$\boxed{5}$ Vi tar utgangspunkt i parametriseringen for enhetssirkelen

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Å justere radien til noe annet enn 1 er bare å gange hele greia med radien, og sentrum flytter vi ved å legge til en konstant vektor. Sirklene har likninger

$$f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 \qquad \text{og} \qquad f_2(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 - 3$$

så parametriseringene blir

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$$

og

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \sqrt{3}\cos\theta \\ 2 + \sqrt{3}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$\boxed{6}$ Nok en gang bygger vi videre på gamle ting, og innser raskt at

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}$$

passer i ellipselikningen

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Finn en parametrisering for en ellipsen som tilfredsstiller Den første likningen er av denne typen med $a = 1/\sqrt{2}$ og $b = 1$, så

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

gjør jobben. Den tredje komponenten regner vi ut ved å ta $x_3 = -x_1 - x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \sin\theta$, slik at vi får

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ \sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \sin\theta \end{pmatrix}.$$

$\boxed{7}$ En ellipse har parametrisering

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix},$$

så hvis vi setter sammen

$$y(\theta) = R(\alpha)x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix},$$

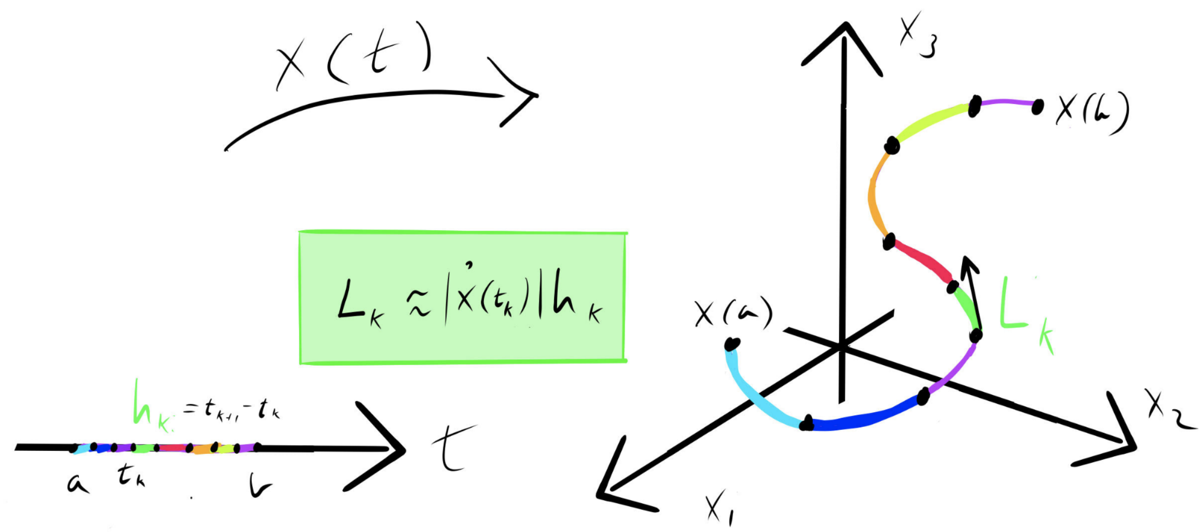
så er vi der. For $\alpha = \pi/4$ får vi

$$y(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ b\sin\theta + a\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\boxed{9}$ Formelen

$$\int_\Gamma ds = \int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt$$

er en definisjon, og den kan motiveres på flere måter. Steg én er å ta en titt på denne figuren:



Her er intervallet $[a, b]$ på t-aksen partisjonert i n korte linjestykker med lengde h_k. De korresponderende krumme lengdene i $\mathbb{x}$-koordinatsystemet heter L_k, se fargekodene. Buelengden er

$$\sum_{k=0}^{n} L_k \approx \sum_{k=0}^{n-1} |\dot{x}(t_k)|\, h_k,$$

og vi har god tro på at uttrykket på høyre side blir en bedre approksimasjon etter hvert som partisjonen gjøres finere. Men uttrykket til høyre er en venstre riemannsum for funksjonen $|\dot{\mathbb{x}}(t)|$, så når partisjonen blir finere, går denne summen mot

$$\int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt.$$

Funksjonen $x : [0, 2] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \ln(1+t^2) \\ 2\arctan t \end{pmatrix}$$

er spesielt designet til NTH av en ekspert på å konstruere parametriserte kurver man kan beregne buelengden til. Vi finner først tangenten

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{1+t^2} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

og banefarten

$$|\dot{x}(t)| = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$$

og buelengden

$$\int_0^2 |\dot{x}(t)|\, dt = \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \sinh^{-1}(2).$$

$\boxed{10}$ Tangenten til ellipseparametriseringen er

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix}$$

og banefarten er

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

slik at buelengden blir

$$\int_0^{2\pi} |\dot{x}(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}\, dt.$$

Dette kalles et **elliptisk integral**, og kan ikke beregnes analytisk. Det er av forskjellige grunner berømt,[1] og kode finner du her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/python/kvadratur/buelengde/ellipse.py`

$\boxed{11}$ Vi finner tangenten:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

og banefarten

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

og buelengden:

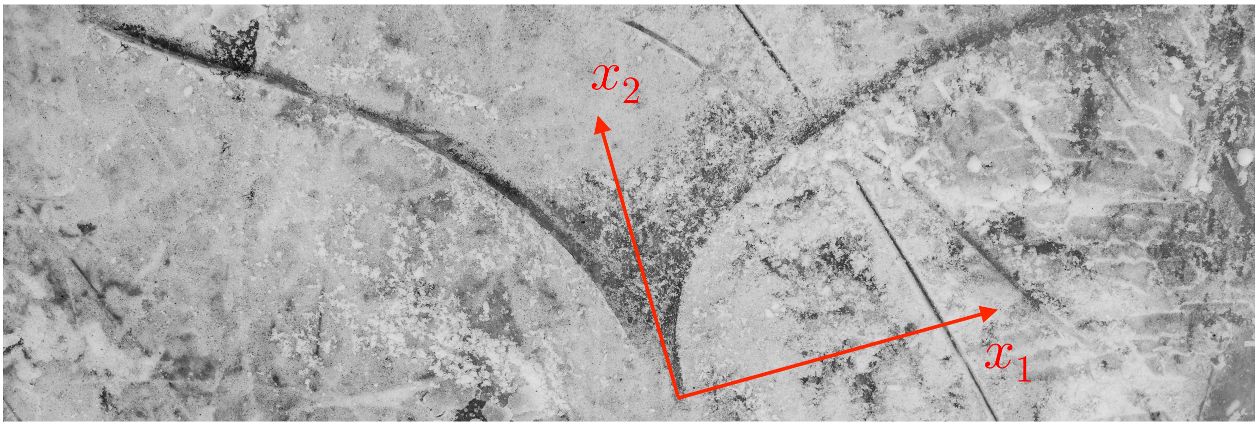
$$\int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt = \sqrt{2} \int_a^b \, dt = \sqrt{2}(b-a).$$

For buelengdeparametrisering må vi ha et startpunkt, så la oss sette $a = 0$ og $b = t$. Buelengden er i så fall $s = \sqrt{2}t$, så om vi setter inn $t = s/\sqrt{2}$ i den opprinnelige parametriseringen, får vi buelengdeparametriseringen

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(s/\sqrt{2}\right) \\ \sin\left(s/\sqrt{2}\right) \\ s/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_integral`

12 Den ser faktisk omtrent sånn ut. Ihvertfall nesten. Om jeg skulle tegna den i forelesning, ville det ikke blitt mer nøyaktig.



13 Tangenten er

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

og enhetstangenten er

$$T(t) = \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 4t^2}} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = \frac{1}{|t|\sqrt{9t^2 + 4}} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{9t^2 + 4}} \begin{pmatrix} 3t^2/|t| \\ 2t/|t| \end{pmatrix}.$$

La oss se litt på hva alle disse tingene blir når $t \to 0$. Det er lett å se at

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{9t^2 + 4}} = 2$$

og at

$$\lim_{t \to 0} \frac{3t^2}{|t|} = 0.$$

Men vi har

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{t}{|t|} = 1.$$

og

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{t}{|t|} = -1.$$

slik at

$$\lim_{t \to 0^+} T(t) = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\lim_{t \to 0^-} T(t) = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dette betyr at om du går inn i origo på den negative siden av $t = 0$, peker enhetstangenten rett ned, men når du går utover fra orige på den positive siden av $t = 0$, peker enhetstangenten plutselig rett opp istedet. Den snur momentant 180 grader i $t = 0$ fordi kurven stopper opp og begynner å kjøre motsatt vei.

$\boxed{14}$ Denne ser ut som $x_1 = x_2^2$, bare plott i python og se.

$\boxed{16}$ Deriverer du likningen $T(t)^T T(t) = 1$, får du $2\dot{T}(t)^T T(t) = 0$ så endringen i enhetstangentvektoren står normalt på enhetstangentvektoren. Dette har å gjøre med at enhetstangentvektoren ikke endrer lengde, så det eneste som endres med tiden er retningen den peker.

$\boxed{17}$ La oss gjøre dette for den sirkulære heliksen. Tangenten er

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

og banefarten er

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

så enhetstangenten er

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

og enhetsnormalen er den normaliserte tidsderiverte av denne:

$$N(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Merk hvordan sistnevnte alltid peker rett inn mot x_3-aksen. Binormalvektoren er kryssproduktet av disse to, og her vil jeg benytte anledningen til å avsløre et hemmelig triks dere kan bruke for å huske den umulige kryssproduktformelen. Det er relativt lett å huske regnereglene for de imaginære kvaternionene:

$$\begin{array}{lll} ij = k & jk = i & ki = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$

I gamle dager skrev vi

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

for standardbasisen i $\mathbb{R}^3$, og dette er antagelig fordi kryssproduktet mellom disse tre følger den samme tabellen:

$$\begin{array}{lll} i \times j = k & j \times k = i & k \times i = j \\ j \times i = -k & k \times j = -i & i \times k = -j \end{array}$$

Denne tabellen er lett å huske siden den øverste raden er syklisk på bokstavene i j k, og forhåpentligvis har du i ryggraden fra gymnaset at

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0.$$

Vi kan bruke disse regnereglene til å beregne kryssproduktet slik:

$$
\begin{aligned}
T \times N =& \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i\cos t + j\sin t + k\right) \times \left(-i\sin t - j\cos t\right) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(i \times i \cos t \sin t + i \times j \cos^2 t \\
& - j \times i \sin^2 t - j \times j \sin t \cos t \\
& - k \times i \sin t - k \times j \cos t\Big) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(i \times j \cos^2 t - j \times i \sin^2 t - k \times i \sin t - k \times j \cos t\Big) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(k\cos^2 t + k\sin^2 t - j\sin t + i\cos t\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ved første øyekast ser det kanskje ikke enklere ut enn å memorisere kryssproduktformelen, men fordelen er at man kan skru av hjernen, så med litt trening er det mye mer praktisk. Krumningen

$$
\kappa(t) = \frac{|x'(t) \times x''(t)|}{\left(\sqrt{x'(t)^T x'(t)}\right)^3}
$$

er et mål på hvor fort enhetstangenten dreier, og torsjonen

$$
\tau(t) = \frac{\Big(x'(t) \times x''(t)\Big)^T x'''(t)}{|x'(t) \times x''(t)|}
$$

er mål på hvorvidt kurven ikke er plan i et punkt - null torsjon betyr at kurven ligger i et plan. Begge disse er lette å beregne for den sirkulære heliksen.