TMA4101/4106/4111/4121

3 - 12 - TRIPPELINTEGRALER

Trippelintegral fungerer som dobbeltintegral, men det er vanskeligere å visualisere. Vi integrerer funksjoner fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}$ over et område Ω, og du tenker på funksjonen som massetetthet og på Ω utstrekningen til en ting du ønsker å finne den totale massen til. Fysikere skriver

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV$$

men matematikere liker kanskje bedre å skrive

$$\iiint_\Omega f(x)\, dx \qquad \text{eller bare} \qquad \iiint_\Omega f$$

Det enkleste er å integrere over en rektangulær boks, og integralene utføres fra innerst til ytterst slik som med dobbeltintegraler. La $f(x) = x_1^2 x_2 + x_3$.

$\boxed{1}$ Regn ut

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 f(x)\, dx_3 dx_2 dx_1.$$

Dersom f er massetetthet, hvordan tolkes det innerste integralet? Hva med de to innerste?

Forhåpentligvis ser du at integrasjonsrekkefølgen kan gjøres på seks forskjellige måter.

$\boxed{2}$ Regn ut integralet på de fem andre måtene.

Trippelintegraler blir hårete om integrasjonsdomenet er uggent. Det finnes ellers flinke mennesker som nekter å ta i dem. La oss prøve noe litt vanskeligere.

$\boxed{3}$ Gjenta når Ω er et tetraeder med hjørner i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$.

$\boxed{4}$ Hva om Ω er definert ved ulikhetene $0 \leq x_3 \leq 1 - |x_1| - |x_2|$?

Hvis $\rho(x)$ er massetetthet i vekt per volum og Ω er en klump med masse, er trippelintegralet til ρ over Ω klumpens totale masse. Massesenteret er gitt ved

$$\frac{1}{\iiint_\Omega \rho(x)\,dx}\begin{pmatrix}\iiint_\Omega x_1\rho(x)\,dx\\ \iiint_\Omega x_2\rho(x)\,dx\\ \iiint_\Omega x_3\rho(x)\,dx\end{pmatrix}$$

$\boxed{5}$ Finn massesenteret til tingene i oppgave 3 og oppgave 4 ved konstant massetetthet.

Hvis du vil trippelintegrere en funksjon f over et domene Ω som ikke er rektangulært, kan det fort bli noe svineri.

$\boxed{6}$ Sett opp formelen for massesenteret til en halv enhetskule i kartesiske koordinater.

Heldigvis finnes det koordinatskift. Trikset er det samme som for dobbeltintegraler - man må finne en parametrisering av integrasjonsområdet Ω hvis definisjonsmengde D er en rektangulær boks eller noe annet enkelt, og så kompenserer man for volumendringen med parametriseringens jacobideterminant. La $g : D \to \Omega$ være en koordinatavbildning gitt ved $y = g(x)$. Volumet til Ω er

$$\int_\Omega dy = \int_D |g'(x)|\,dx$$

der $|g'(x)|$ er determinanten til jacobimatrisen til g.

$\boxed{7}$ En koordinatavbildning $g : D \to \Omega$ er gitt ved

$$f(x) = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Finn volumet av $f(D)$ dersom D er enhetskuben.

Det finnes to koordinattransformasjoner som brukes mye i fysikk. Dersom integrasjonsområdet er formet som en sylinder parallell med z-aksen, bruker man sylinderkoordinater:[1]

$$x = g(s, \theta, z) = \begin{pmatrix} s\cos\theta \\ s\sin\theta \\ z \end{pmatrix}.$$

Det er selvfølgelig ikke noe problem å legge sylinderen parallelt med de andre koordinataksene. Variabelen s er den samme som r i polarkoordinater, men på neste side trenger vi r til radien i tre dimensjoner, så det er bedre å bruke s i sylinderkoordinater.

$\boxed{8}$ Finn jacobideterminanten.

Jeg kunne bedt deg om å finne massesenteret til en sylinder som var kappet på langs eller noe sånt, men du har allerede funnet massesenteret til et kakestykke, så det er ikke nødvendig. Vi får heller ta noen gamle klassikere fra TMA4105.

$\boxed{9}$ Regn ut

$$\iiint_\Omega (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\, dx$$

der $\Omega = \{x : 0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 9 \text{ og } 0 \leq x_3 \leq 5\}$.

$\boxed{10}$ Finn volumet av den delen av kjeglen

$$x_3^2 \geq x_1^2 + x_2^2$$

som ligger innenfor kuleskallet $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

$\boxed{11}$ Regn ut

$$\iiint_\Omega x_3\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx$$

der legemet Ω er gitt ved $0 \leq x_3 \leq 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x_2 \geq 0$.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Cylindrical_coordinate_system

Den andre viktige transformasjonen er kulekoordinater:[2]

$$y = g(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Her er r avstanden til origo, θ vinkelen med x_1-aksen (altså den samme som i polarkoordinater), og ϕ vinkelen med x_3-aksen (altså en ny vinkel du antagelig ikke har sett før).

$\boxed{12}$ Finn jacobideterminanten.

$\boxed{13}$ Finn massesenteret til en åttendels kule, en kvart kule og en halvkule, alle med konstant massetetthet.

Også her får vi ta noen klassikere fra TMA4105.

$\boxed{14}$ Jeg tok ut denne for den var så lik forrige oppgave.

$\boxed{15}$ La Ω være det romlige legemet som er avgrenset av flaten $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 4}$ samt planene $x_3 = 0$ og $x_3 = \sqrt{5}$. Regn ut volumet av Ω.

$\boxed{16}$ Finn volumet av legemet som er avgrenset av flaten oppgitt i kulekoordinater ved

$$r = 4 - \cos(\varphi).$$

[2]https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system

Til slutt et viktig poeng om notasjon. La oss ta det elektriske feltet

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3}$$

fra en punktladning som eksempel. Til nå har jeg slurvet litt og brukt bokstaven E den elektriske feltstyrken og for for funksjonen som gir den elektriske feltstyrken gitt x. Hvis vi nå er interessert i å finne hvordan E varierer med r, θ eller ϕ er det fristende å skrive

$$E(r,\theta,\phi) \qquad \frac{\partial E}{\partial r} \qquad \frac{\partial E}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial E}{\partial \phi}.$$

Men dette er litt skummelt, for om vi setter kulekoordinater inn i formelen for $E(x)$:

$$E(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix}$$

har vi nå den samme fysiske størrelsen, men helt annen funksjon og helt andre uavhengige variable. Det helt klart ryddigste er å reservere egne bokstaver til alt slik:

$$E = f(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{|x|^3} \qquad\qquad E = h(r,\theta,\phi) = f(g(r,\theta,\phi)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix}$$

Dette gjøres nesten aldri i praksis, og i en fysikkbok vil det typisk bare stå

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial E}{\partial x_2} \qquad \frac{\partial E}{\partial x_3} \qquad \frac{\partial E}{\partial r} \qquad \frac{\partial E}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial E}{\partial \phi}$$

om hverandre. Dette er nok én av hovedgrunnene til at elmag og termo og annen fysikk med flere uavhengige variable er vanskelig å forstå i starten. I termo kan de fint skrive både

$$U = U(S,V) \qquad \text{og så} \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p$$

Skulle man alltid vært nøye på å skille disse hadde det også blitt forferdelig mange bokstaver å holde styr på, så derfor har man endt opp med å bruke samme bokstav til både en fysisk størrelse og forskjellige funksjoner mellom den og andre fysiske størrelser. Dette er viktig å vite om i starten, slik at man kan holde tungen beint i munnen. La oss ta en treningsoppgave.

$\boxed{17}$ Du har tidligere funnet

$$E'(x) = \left(\frac{\partial E}{\partial x_1}, \frac{\partial E}{\partial x_2}, \frac{\partial E}{\partial x_3}\right).$$

Finn

$$E'(r,\theta,\phi) = \left(\frac{\partial E}{\partial r}, \frac{\partial E}{\partial \theta}, \frac{\partial E}{\partial \phi}\right).$$

Nå har jeg bevisst misbrukt notasjon. Bruk kjerneregelen på

$$E = h(r,\theta,\phi) = f(g(r,\theta,\phi)).$$

der g er er kulekoordinatfunksjonen. Sett også inn og ta det på direkten og dobbeltsjekk svaret.