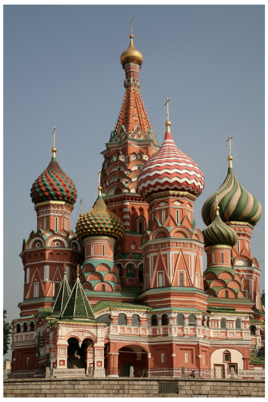
3 - 11 - FLATEINTEGRALER

I likningen for trommeskinnet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

er det gjort en antagelse om at en bit av skinnet kun beveger seg rett opp og ned. Dette er nok ikke langt fra sannheten for et elastisk trommeskinn, men for bølge på havet er det åpenbart feil. Bølger bryter når de kommer inn på grunt vann, og da er ikke vannspeilet et skalarfelt lenger. Et skalarfelt vil aldri se ut som et terreng med overhengede stup, og aldri som en løkkuppel eller en smultring eller en pølse. Derfor har vi **parametrisert flate**. [a] Dette er en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$.

[a] https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_surface



Vasilijkatedralen ved Røde plass har flere løkformede kupler.

Vasilijkatedralen
Av W. Bulach.

https://snl.no/løkkuppel

Forskjellen mellom tovariable skalarfelt og parametriserte flater er analog til forskjellen mellom funksjoner av én variabel og parametriserte kurver. Både $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$y = f(x)$$

og $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

tenker vi på som kurver i planet, men funksjonstypene oppfører seg forskjellig. Du kan for eksempel ikke angi en kurve krysser seg selv med førstnevnte. Hva slags flate angir $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$\boxed{1}$ $\Omega = [0,1] \times [0,1]$,

$$g(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad ?$$

$\boxed{2}$ $\Omega = [0,2\pi) \times [0,1]$,

$$g(\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix} \quad ?$$

$\boxed{3}$ $\Omega = [0,2\pi) \times [0,\pi]$,

$$g(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \quad ?$$

$\boxed{4}$ Funksjonen $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ gitt ved $p(x) = (40x - 4)(x-1)^4$ ser nå i bunn og grunn ut som tverrsnittet av en kuppel, spør du meg. Bruk p til å sette opp en passelig parametrisering for en typisk løkkuppel.

Det første vi må lære er regne ut overflatearealet til en parametrisert flate. Størrelsen

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|$$

er analog til jacobideterminanten, og arealet til Σ parametrisert ved $g : \Omega \to \Sigma$ er

$$\iint_\Sigma dS = \iint_\Omega \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| dx.$$

Du kan faktisk tenke på en koordinatavbildning fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ som en parametrisert flate som har x_3-komponent lik null overalt.

$\boxed{5}$ Finn arealet til flatene i oppgave 1-4.

$\boxed{6}$ La Σ være den del av kuleflaten med ligning $x_1^2 + x_1^2 + x_3^2 = 9^2$ som ligger over planet $x_3 = 2$. Finn arealet av Σ.

Den som har vært med å bygge et tak, vet at takets massetetthet målt i vekt per areal er langt fra uniform. I et tak finnes det sperrer, isolasjon, undertak, blikkplater, skruer og vinkeljern og så videre. På Revneset er alt skeivt, så isolasjonen i taket er 5 cm på det tynneste og 20 cm på det tykkeste. Når man konstruerer store bygg er dette selvfølgelig viktig å vite, for man må vite hvordan lasten på takkonstruksjonen er fordelt. Takets totalvekt er

$$\iint_\Sigma \rho \, dS = \iint_\Omega \rho\left(g(x)\right) \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| dx$$

der Σ er taket og $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ takets parametrisering.

$\boxed{7}$ Finn vekten taket på grillhytten dersom du antar konstant massetetthet.

Massesenteret til flaten Σ med massetetthet $\rho(y)$ er gitt ved

$$\frac{1}{\iint_\Sigma \rho \, dS} \begin{pmatrix} \iint_\Sigma y_1 \rho(y) \, dS \\ \iint_\Sigma y_2 \rho(y) \, dS \\ \iint_\Sigma y_3 \rho(y) \, dS \end{pmatrix}.$$

$\boxed{8}$ Finn massesenteret til et halvt kuleskall med konstant massetetthet.

La flaten være parametrisert ved $g(x)$. De partiellderiverte

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \text{og} \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}$$

er begge tangentvektorer til flaten, og følgelig er av enhetsnormalvektorene til flaten gitt ved

$$N = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2}}{\left|\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2}\right|}$$

Finn utnormalvektorer til

$\boxed{9}$ en sylinder. $\boxed{10}$ en kule. $\boxed{11}$ et tetraeder. $\boxed{12}$ en smultring.

Har man forstått formelen for flateintegral over skalarfelt, blir fluksintegraler greit. Tenk igjen at du står ute i en elv med vadebukser og holder en tom bilderamme under vann og måler hvor mange liter vann som flyter gjennom rammen per tidsenhet. Vannstrømmen f er en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$, og strømmen gjennom et punkt på flaten (i liter per kvadratmeter per sekund) er gitt ved

$$f \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2}}{\left|\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2}\right|}$$

slik at den totale utstrømmningen gjennom flaten Σ (i liter per sekund) er

$$\iint_\Sigma f \cdot N \, dS = \iint_D f(g(x)) \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2}}{\left|\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2}\right|} \left|\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2}\right| dx$$

$$= \iint_D f(g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \, dx.$$

$\boxed{13}$ Regn ut fluksen til den laminære vannstrømmen fra økt 3-5 ut av alle områdene i forrige oppgave.

Vi regner også fluksen til elektriske felt.

$\boxed{14}$ En punktladning q står i origo. Finn fluksen ut gjennom et kuleskall sentrert i origo.