TMA4101/4106/4111/4121

3 - 10 - HARMONISKE FUNKSJONER

Laplaceoperatoren

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

for skalarfelt og divergensen

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

for vektorfelt er i slekt med hverandre og dukker opp så ofte i fysikk at jeg følte vi burde ta en økt til om disse. Vi må nesten se hvordan de dukker opp i anvendelser før vi går videre. Oppgavene i denne økten er nok litt i vanskeligste laget for å finne ut av selv, så du må antagelig søke dem opp.

$\boxed{1}$ Utled bølgelikningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

for et vibrerende membran, for eksempel et trommeskinn.

$\boxed{2}$ Utled varmelikningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

for en isolert plate.

$\boxed{3}$ Utled Poissons likning

$$\frac{p}{T} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

for et trommeskinn i ro med horisontalt strekk T og utsatt for trykket p.

$\boxed{4}$ Utled kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho v_2}{\partial x_2} = 0$$

for et fluid med tetthet ρ (målt i kilo per kvadratmeter) og væskehastighet v (målt i liter per sekund per meter). Likningen

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$$

for et divergensfritt vektorfelt er et spesialtilfelle der ρ er konstant, slik at væsken er inkompressibel.

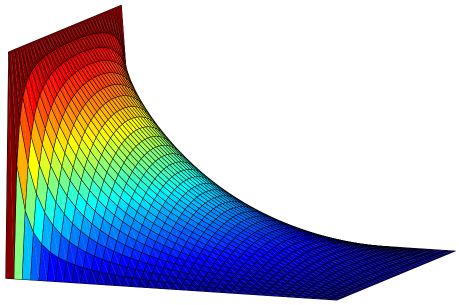
$\boxed{5}$ Laplaces likning

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = 0$$

dukker opp som spesialtilfelle av alle disse, på litt forskjellige måter. Hvordan?

6 Utled at løsningen til Laplaces likning på rektangelet $[0, \pi] \times [0, \pi]$ med randkrav

$$u(x_1, 0) = V(0, x_2) = V(\pi, x_2) = 0$$



og

$$V(x_1, \pi) = f(x_1).$$

er

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh nx_2 \sin nx_1,$$

der

$$A_n = \frac{2}{\pi \sinh n\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Plott løsningen for $f(x) = 1$. Du bør få noe som ser omtrent slik ut.

7 Vis at laplaces likning er **rotasjonsinvariant**, altså at de rene partiellderiverte summerer til det samme også om du roterer koordinatsystemet.

8 La Ω være en sirkelskive med radius r, sentrert i x. Vis at

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Omega} u$$

dersom u er harmonisk på et område som inneholder Ω.

Nøtt Finn uttrykket for trommeskinnet på bildet under.
(Hint: Løsningen kalles **Poissons formel**.)

Takk til Lars i TSO for herpa skarptrommeskinn med form ikke helt ulik $f(x) = x_1 x_2$.