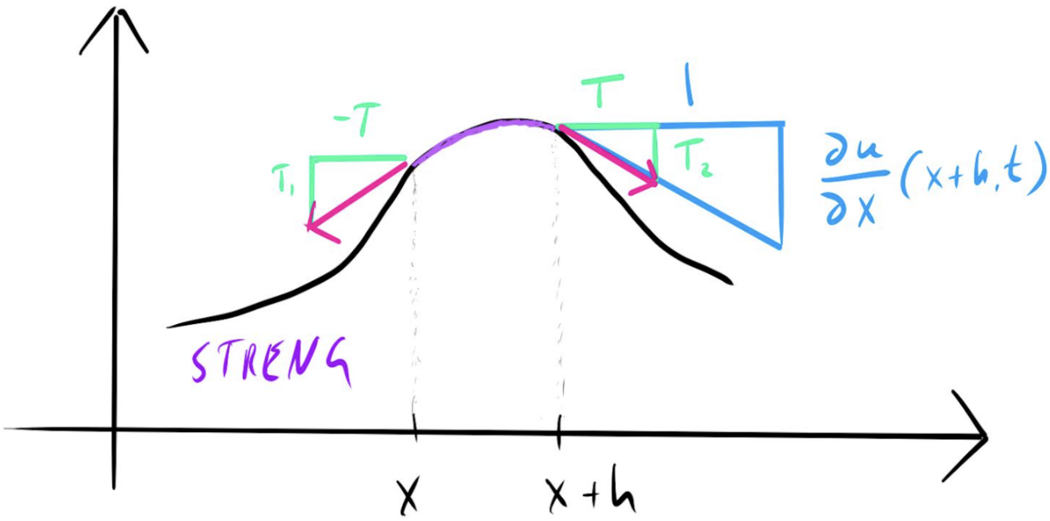
3 - 10 - HARMONISKE FUNKSJONER - LF

$\boxed{1}$ Når vi utledet bøleglikningn for en streng, gjorde vi slik:



Vi antar at den horisontale strekkraften T (målt i newton) er lik overalt, slik at den lilla biten av strengen kun beveger seg opp og ned, ikke frem og tilbake. Massetettheten ρ er gitt i kilo per meter, så massen til den lilla biten er ρh. Netto vertikal kraft på biten er $T_1 + T_2$, så Newtons andre lov $F = ma$ gir

$$T_1 + T_2 = \rho h \ddot{u},$$

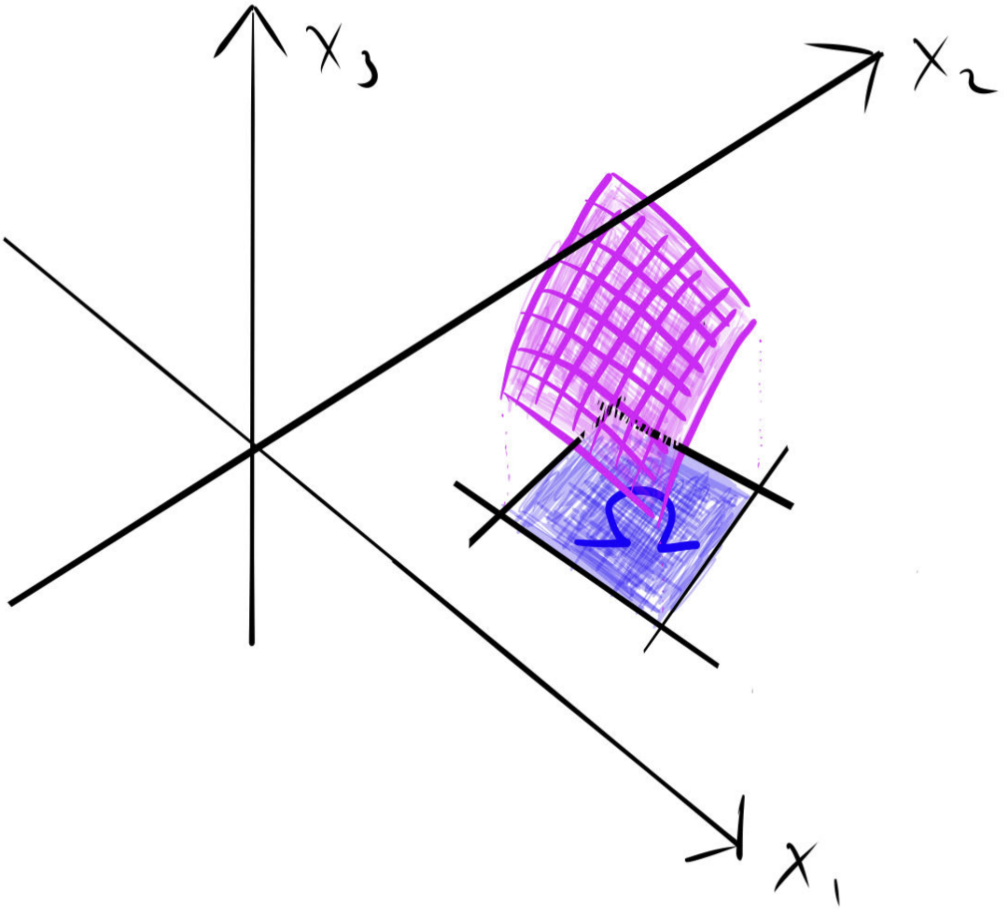
og siden dekomponeringen av strekkraften danner en trekant som er kongruent med trekanten som gir stigningstallet til u med hensyn på x, kan vi skrive

$$T_1 + T_2 = T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+h,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right).$$

Hvis vi nå deler Newtons andre lov på h og lar $h \to 0$, får vi bølgelikningen for en streng:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

La oss se på en liten bit av et trommeskinn:



Strekkraften på en streng er naturlig å måle i Newton, for strengens stramhet kan sammenlignes med stramheten du får ved å bruke den til å henge opp et lodd. (På gitarstrengpakken står strengestrekker oppgitt i kilo.) For et trommeskinn er det mest naturlig å oppgi strekket i newton per meter - da kan du integrere strekket over et linjestykke for å finne den totale kraften på linjestykket. Dette er som hydrostatisk trykk i vann - trykk er kraft per areal, og man integrerer trykket over en flate for å finne totalkraften på flaten. Hvis vi sier at Ω i figuren er et kvadrat med det ene hjørnet i x, sidekant h og massesenter i $(x_1 + h/2, x_2 + h/2)$, blir Newtons andre lov

$$\rho h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1 + h/2, x_2 + h/2) = \\ Th\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_1 + h, x_2, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, x_2, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, x + h_2, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, x_2, t)\right)$$

der kreftene på høyre side er fremkommet ved å anta at det horisontalet strekket T er konstant og så bruke det samme kongruenstrikset som for strengen. Lar vi $h \to 0$, får vi bølgelikningen

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

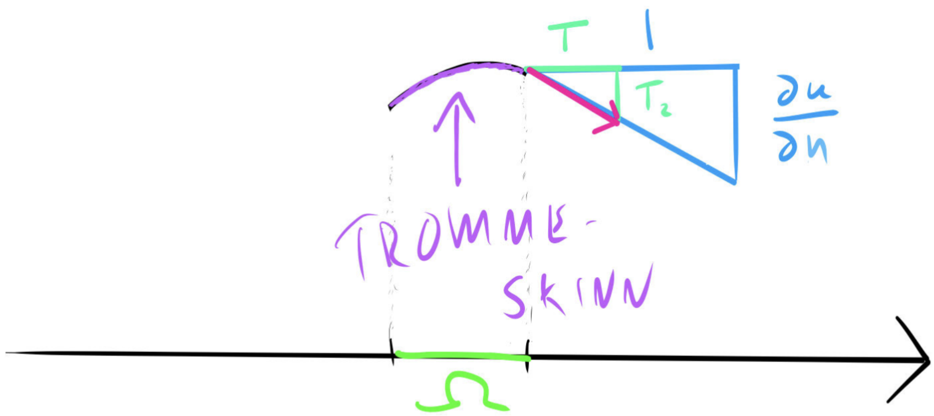
for et vibrerende membran, for eksempel et trommeskinn. Vi kunne også summert opp kreftene langs randen av den lille biten og så brukt Greens teorem slik:

$$F = T\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = T\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\, dx \approx Th^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

Dette var det noen som syntes var mer naturlig i forelesning. Uttrykket

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}$$

er en spesiell notasjon for den retningsderiverte til u langs utnormalvektoren til $\partial\Omega$, og det er kanskje ikke helt trivielt å se at netto kraft er linjeintegralet til denne. For å se det må du nesten tegne opp den samme kongruenstrekanten som for strengen, men sette den på kanten av den lille biten med trommeskinnet og normalt utover slik:



$\boxed{2}$ Vi har en plate som er dekket av Glava over og under slik varmeenergi kun strømmer horisontalt langs platen. La Ω være en liten bit av platen. Vi kan sette opp endring i indre energi slik:

$$\frac{d}{dt}\alpha \iint_{\Omega} u = \alpha \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Konstanten α inneholder info om varmekapasiten, platens tykkelse og alt det der. Endring i indre energi må være lik det som strømmer ut gjennom $\partial\Omega$, så vi må ha

$$\alpha \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} = -\int_{\partial\Omega} q \cdot n\, ds$$

der q er varmefluksen. I mange materialer er denne proporsjonal med temperaturgradienten men motsatt rettet, slik at vi får

$$\alpha \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} = k\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Dette må gjelde for alle små biter av platen, så da må integrandene være like, og vi får

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

Utledningen står også her: `https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_12.html`
Husk at varmelikningen ikke bare er en modell for varmeflyt, men også for diffusjon, derfor kalles den gjerne diffusjonslikningen:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion_equation`
Utledningen er identisk, man bare bytter ut temperatur med konsentrasjon, energikonservering med massekonservering, og Fouriers varmelov med Fikcs diffusjonslov som sier nøyaktig det samme.

3 Her er det bare å bytte ut alt på høyre side i utledningen av bølgelikningen med det som kreves for at trommeskinnet skal være deformert men i ro. La oss anta at trommeskinnet utsettes for et statisk trykk $f(x)$ og så må strekkreftene i skinnet balanserer de eksterne trykkreftene slik at trommeskinnet ikke flytter på seg. Vi bruker Greens teorem slik som i bølgelikningen og får strekkreftene

$$T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = T \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \, dx$$

og trykkreftene er

$$\iint_{\Omega} f(x) \, dx.$$

Setter vi disse lik hverandre og antar at Ω er vilkårlig valgt, må integrandene være like. Dette kalles Poissons likning:

$$\frac{f}{T} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

og er den inhomogene varianten av Laplaces likning. Se også utledning her:
`https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_12.html`

4 Dersom ρ er oppgitt i kilo per kvadratmeter er

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega} \rho = \iint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

den totale massen inne på området Ω, og dersom v er væskehastigheten i meter per sekund er

$$\int_{\partial\Omega} \rho v \cdot n \, ds$$

den totale utstrømningen fra Ω. Dersom masse ikke skal forsvinne, må disse to være like, og Greens teorem gir

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx = \int_{\partial\Omega} \rho v \cdot n \, ds = \iint_{\Omega} \frac{\partial \rho v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho v_2}{\partial x_2} \, dx$$

og dersom Ω er tilfeldig valgt, må integrandene være like og vi får kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho v_2}{\partial x_2} = 0$$

$\boxed{5}$ I oppgave 1 får vi en harmonisk funksjon om $\ddot{u} = 0$, og i oppgave 2 om $\dot{u} = 0$ og i oppgave 3 om $p = 0$. I oppgave 4 får vi laplaces likning dersom ρ er konstant og v er gradienten til et skalarfelt ϕ. Da tvinger kontinuitetslikningen gjennom at ϕ er en harmonisk funksjon.

$\boxed{6}$ Denne oppgaven passer konseptuelt inn her, men regneteknisk hører den mer hjemme i TMA4106, så det kommer ikke på eksamen. Jeg har løst den på side 137-138 her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/notater/sivingmatte.pdf`

$\boxed{7}$ Vi må sjekke at dersom

$$x = Ry = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

og $v(y) = u(Ry)$ er

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}$$

så lenge R er rotasjonsmatrisen. La oss derivere i vei:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y_1} &= \cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} - \sin\alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} &= \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} - \sin\alpha \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \\
&\quad - \sin\alpha \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} - \sin\alpha \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \\
\frac{\partial v}{\partial y_1} &= \sin\alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} &= \sin\alpha \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sin\alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \\
&\quad + \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sin\alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)
\end{aligned}$$

Hvis du nå legger sammen de rene andre ordens partiellderiverte og gjør alle kanselleringene, vil du se at

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Et spesialtilfelle er at om u er harmonisk, er også v harmonisk.

$\boxed{7}$ Standardmetoden her er å finne ut hva integralene på høyre side evaulerer til. Dersom Ω er en sirkelskive sentert i $(a,b)^T$ med radius r, kan vi definere oss en funksjon ϕ og skrive

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial\Omega} u \, ds \\
&= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\; r d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\; d\theta
\end{aligned}$$

La oss derivere litt og bruke Greens teorem slik vi pleier:

$$
\begin{aligned}
\phi'(r) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u'(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\, d\theta \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\theta \\
=& \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n}\, r d\theta \\
=& \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \\
=& \frac{1}{2\pi r}\iint_\Omega \Delta u\, dx = 0
\end{aligned}
$$

$$
u(x) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial\Omega} u\, ds = \frac{1}{\pi r^2}\iint_\Omega u
$$

Greit, så ϕ endrer seg visst ikke med r. Hva er ϕ sin konstante verdi? Det går sikkert fint å la $r \to 0$, siden ϕ er konstant:

$$
\lim_{r\to 0}\phi(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial\Omega} u\, ds = u(a, b)
$$

Det siste steget er kanskje ikke helt innlysende for alle, men middelverdisatsen kommer i en versjon for integraler, skroll deg litt nedover her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_theorem`
Konsekevensen er at

$$
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\, dx = f(x),
$$

og vår grenseverdioperasjon for ϕ er den samme, bare at vi har rullet sammen arket f er tegna på til en sylinder med radius r og så er u høyden til sylinderen som funksjon av r og θ. Alt i alt har vi at

$$
u(x) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial\Omega} u\, ds.
$$

Vi tar så det neste integralet i polarkoordinater og regner i vei:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi r^2}\iint_\Omega u =& \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} u(a + p\cos\theta, b + p\sin\theta)\, p d\theta dp \\
=& \frac{u(a, b)}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi p\, dp = u(a, b)
\end{aligned}
$$

Dette kalles altså middelverdisatsen. En harmonisk funksjons funksjonsverdi er alltid lik gjennomsnittet av funksjonsverdiene både på alle omliggende sirkler og alle omliggende sirkelskiver:

$$
u(x) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial\Omega} u\, ds = \frac{1}{\pi r^2}\iint_\Omega u
$$

$\boxed{8}$ Nå er jeg litt lei av å skrive alle disse partiellderiverte. La oss introdusere notasjonen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Dirichletproblemet består i å løse

$$\begin{aligned} \Delta u =& 0 \qquad \text{på } \Omega \\ u =& g \qquad \text{på } \partial\Omega \end{aligned}$$

Dette problemet har entydig løsning, og om Ω er en sirkel sentrert i origo med radius a, finnes det faktisk en eksplisitt formel:

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(a\cos\phi, a\sin\phi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \phi) + r^2}\, d\phi$$

Utledningen er litt for grisete for TMA4111, men det er i samme gate som oppgave 6, bare mer jobb. Integralet på høyre side er stort sett umulig å beregne for hånd, men trivielt å beregne med numerisk integrasjon. Du finner kode her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/harmonisk/`
og trommeskinnet ser omtrent sånn ut: