TMA4101/4106/4111/4121

# 3 - 1 - OM KART OG KOMPASS

Nå skal vi studere **flervariabel kalkulus**, altså læren om funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$. Målet med semesteret er å finne mening i alle symbolene i Maxwells likninger. James Clerk Maxwell er kreditert med den første komplette modellen av elektromagnetisme. Han formulerte det som noen og tyve ymse empiriske regler, men Oliver Heaviside kondenserte alt ned til denne pene formen noen år etter Maxwells originale publikasjon:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \qquad \iint_{\partial\Omega} E \cdot dS &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, dx \\
\nabla \cdot B &= 0 & \qquad \iint_{\partial\Omega} B \cdot dS &= 0 \\
\nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} & \qquad \int_{\partial\Sigma} E \cdot ds &= -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B \cdot dS \\
c^2 \nabla \times B &= \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t} & \qquad c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds &= \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} J \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} E \cdot dS
\end{aligned}
$$

De til venstre er på differensialform, mens de til høyre er korresponderende likninger på integralform. Likningene kalles (fra øverst til nederst) Gauss' lov, Faradays induksjonslov, Gauss' lov for magnetisme og Amperes lov. Lovene er et koblet sett med differensial- eller integrallikninger, der

- $E$ er det elektriske feltet
- $B$ er det magnetiske feltet
- $\rho$ er ladningstettheten i rommet[1]
- $J$ er strømtettheten i rommet[2]
- $c$ er lyshastigheten i vakuum[3]
- $\epsilon_0$ er permittiviteten i vakuum[4]

De elektriske og magnetiske feltene $E$ og $B$ er ukjente, mens ladningstettheten $\rho$ og strømtettheten $J$ er kjente. De ukjente feltene og strømtettheten er funksjoner fra $\mathbb{R}^4$ (rom og tid) til $\mathbb{R}^3$, mens ladningstettheten er en funksjon fra $\mathbb{R}^4$ (også rom og tid) til $\mathbb{R}$. All klassisk fysikk kan i prinsippet utledes fra disse likningene.

$\boxed{0}$ For å illustrere hvor vanskelig det er å huske noe man ikke forstår, kan du nå nipugge Maxwells lover i to minutter nå og så sjekke om du greier å skrive dem opp imorgen. (Vi prøver igjen på slutten av semesteret.)

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Charge_density
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Current_density
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_light
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Vacuum_permittivity

Studiet av funksjoner fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$ er komplisert. Her er en tabell:

| $m$ | $n$ | Geometrisk tolkning |
|---|---|---|
| 1 | 1 | Kurve i planet som ikke kan skjære seg selv |
| 2 | 1 | Terreng med fjellsider uten overheng |
| 3 | 1 | Tetthet, trykk eller temperatur |
| 4 | 1 | Tetthet, trykk eller temperatur med tidsavhengighet |
| 1 | 2 | Kurve i planet som kan skjære seg selv |
| 1 | 3 | Kurve i rommet |
| 2 | 2 | Todimensjonalt vektorfelt eller koordinattransformasjon |
| 2 | 3 | Flate i rommet |
| 3 | 3 | Tredimensjonalt vektorfelt eller koordinattransformasjon |
| 4 | 3 | Tredimensjonalt vektorfelt med tidsavhengighet |

De første fire radene i tabellen over er funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}$ og kalles **skalarfelt**, siden den uavhengige variabelen er en skalar. Funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ er vi stort sett ferdige med; disse lærte du masse om allerede på skolen. Funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$ har vi vært borti i TMA4106:

- Vi begynte med bølge- og varmelikningen, der løsningen $u(x,t)$ var henholdsvis utslaget til en streng, spenningen på en kraftlinje, eller temperaturen i en stang. Vi så også på sannsynlighetstettheten $|\psi(x,t)|^2$ til posisjonen til en bitte liten partikkel.

- Senere i semesteret tolket vi funksjoner av to variable som et terreng der $x$ er gps-koordinatene og funksjonsverdien $f(x)$ angir høyden over havet.

I dette semesteret skal vi først og fremst fokusere på den siste tolkningen. Her er noen stikkord:

**Nivåkurvene** til $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er kurver i $x$-planet der funksjonshøyden er konstant. Dette er det samme som ekvidistanselinjene på et orienteringskart.

**Gradientvektoren** er en radvektor med de to partiellderiverte til $f$. Dersom du evaluerer denne i et punkt i $x$-planet, får du både

1 stigningen i koordinatretningene og

2 den retningen i $x$-planet der stigningen er brattest.

Dersom du vil ha stigningen i en bestemt retning, prikker du gradientvektoren med en enhetsvektor i retningen; dette kalles **retningsderivert**. Tenk retningen til skiene på skitur.[5]

Et **kritisk punkt** er et punkt der gradientvektoren er null. Her er den retningsderiverte lik null uansett hvilken retning du peker skiene, og dersom terrenget er deriverbart er det her du finner toppen av fjellet eller bunnen av dalen eller sadelpunktet mellom to topper eller fjellhyller.

$\boxed{1}$ La $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - x_2$. Finn nivåkurvene, gradientvektoren og alle kritiske punkter.

[5]Det sies at skisportens vugge er et eller annet sted i Telemark. Tøys og tull. Ski er visst en kinesisk oppfinnelse:
`https://snl.no/ski`
`https://secretsoftheice.com/news/2018/10/04/skis/`
`https://secretsoftheice.com/news/2021/10/05/the-best-preserved-pair-of-skis-from-prehistory/`

I dette semesteret skal vi håndtere inn- og utvariable på en noe mer systematisk måte enn før. Vi skriver $\mathbb{R}^{m \times n}$ for det $nm$-dimensjonale vektorrommet av $m \times n$-matriser, slik at søylevektorer er inneholdt i $\mathbb{R}^{m \times 1}$ og radvektorer i $\mathbb{R}^{1 \times n}$. Den uavhengige variabelen $x$ er søylevektor, og vi setter alltid opp de $m$ komponentene til $f$ i en søylevektor:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

Dette gjør vi for at alt skal passe med slik vi er vant til å håndtere matrise-vektorproduktet, som er en av de viktigste funksjonene fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$. Jeg har kutta ut fete typer for vektorer, for dere går i andre klasse nå og er klare til å takle dette. Jeg kommer også til å skrive

$$|x| \qquad \text{og ikke} \qquad \|x\|$$

for lengden til $x$, for den siste degenerer til den første når $n = 1$. De $mn$ partiellderiverte til $f$ organiseres i **jacobimatrisen**:

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ Vi kjenner allerede godt $f(x) = Ax$, der $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Hva er $f'(x)$?

En gang i forbindelse med en eksamen, måtte jeg finne på noen meningsløse funksjoner. Jeg trodde jeg skulle krepere av kjedsomhet, men det var nødvendig for å teste om studentene hadde forstått jacobimatrisen.

$\boxed{3 - 1}$ La $x \in \mathbb{R}^2$ og $z \in \mathbb{R}^3$ og

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_1 + x_2)^2 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad g(z) = \begin{pmatrix} -z_1 - z_2 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix}.$$

Finn jacobimatrisene til $f$ og $g$.

En av fordelene med å kunne matriseregning, er at kjerneregelen blir veldig enkel å skrive opp. Du tar bare formelen du er vant til, men erstatter multiplikasjonen med et matriseprodukt. La $x \in \mathbb{R}^m$. La $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ og $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, og la $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ være gitt ved

$$h(x) = g(f(x)).$$

Da er $h'(x)$ gitt ved matriseproduktet

$$h'(x) = g'(f(x))\, f'(x).$$

$\boxed{3 -2}$ La $f$ og $g$ være funksjonene i oppgaven over. Finn jacobimatrisene til $f(g(z))$ og $g(f(x))$.

Dersom $m = 1$ sier vi **gradienten** istedet for jacobimatrisen, og mange skriver

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

istedet for $f'$. Merk at rad $k$ i jacobimatrisen er gradienten til $f_k$.

$\boxed{4}$ Et av de aller enkleste skalarfeltene er den lineære funksjonen

$$f(x) = \beta^T x = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

der $\beta$ og $x$ er vektorer i $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Hva er gradienten?

Det er vanlig å bruke mye tid på å studere funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$, så la oss fortsette litt med det. En funksjon vi skal få ganske mye bruk for, er den kvadratiske funksjonen

$$f(x) = x^T A x$$

der $A$ er en kvadratisk matrise.

$\boxed{5}$ Vis at $f'(x) = x^T (A + A^T)$.

(Hint: Skriv ut

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

og deriver i vei.)

Den ideelle gasslov $T = pV/Nk$ er et naturlig eksempel på et andreordens polynom:

$$f(x) = a_{20} x_1^2 + a_{11} x_1 x_2 + a_{02} x_2^2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0.$$

$\boxed{6}$ Når er det et entydig kritisk punkt? Topp eller bunn? Hva er $a$-koeffisientene i $T = pV/Nk$?

**Tangentplanet** til $f$ i $x$ er analogt til tangentlinjen du lærte på skolen og gitt ved formelen

$$p(s) = f(x) + f'(x)(s - x)$$

der $s \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, se 9.9 i Arnes bok.

$\boxed{7}$ Finn tangentplanene til

$$f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 \qquad \text{og} \qquad f_2(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 - 3$$

i punktet $(1, 1)^T$. Tangentplanenes nullnivåkurver skjærer hverandre i ett punkt. Hvilket?

Nivåkurvene til andreordens polynomer er de berømte **kjeglesnittene**.[6] Din daglige rutine er faktisk å reise rundt på en slik - jordens bane rundt solen er sånn omtrent en ellipse.

$\boxed{8}$ Skisser nivåkurvene til funksjonene i forrige oppgave.

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section`

En ting som er komplisert i flervariabel kalkulus, er dette med grenseverdier. Den forferdelige definisjonen av grenseverdi fra forrige semester er identisk for flervariable funksjoner dersom du tolker alle absoluttverditegn som vektorlengde.

$\boxed{9}$ Mannen med ljåen fornyer garderoben sin, og har fått laget seg en stilig ny hette, formet som funksjonen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

der $\Omega$ er enhetskvadratet i $\mathbb{R}^2$. Mannen med ljåen vil selvfølgelig være helt sikker på at grenseverdien inn mot origo ikke eksisterer, for det må jo være noe djevelsk med hetten. Vis at grenseverdien ikke eksisterer og at $f$ ikke er kontinuerlig.

Hvis du synes oppgaven over var merkelig, kan du prøve neste, som er enda merkeligere.

$\boxed{10}$ Når mannnen med ljåen ondt skuler litt til siden får den nye hetten hans en enda med djevelsk form. Den ser nå ut som funksjonen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{2x_1^2x_2}{x_1^4 + x_2^2}.$$

der $\Omega$ fremdeles er enhetskvadratet i $\mathbb{R}^2$. Den ikke-eksisterende grenseverdien i origo bevares naturligvis. Vis at grenseverdien inn mot origo ikke eksisterer.

Dersom $f$ har tre uavhengige variable, må vi visualisere litt annerledes - da er det best å tenke tetthet, temperatur eller trykk i rommet, og vi har nivåflater istedet for nivåkurver.

$\boxed{11}$ Et stearinlys står og brenner i origo. La oss anta at temperaturen i rommet er gitt ved

$$u(x) = \frac{1}{|x|}$$

der $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Finn gradienten til $u$. Hvilken retning peker den? Hvordan ser nivåflatene ut?

Dersom $f$ er et skalarfelt med $n$ uavhengige variable, skriver vi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k x_l}$$

for den dobbelderiverte til $f$ med hensyn på $x_l$ først og med hensyn på $x_k$ etterpå.

$\boxed{12}$ Finn de dobbelderiverte til $u$ over. Hvor mange er det?

En funksjon som tilfredsstiller

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = 0$$

kalles en **harmonisk funksjon**. Disse dukker opp overalt i fysikk.[7]

$\boxed{13}$ Er $u$ over er en harmonisk funksjon?

$\boxed{14}$ En flue flyr langs en **sirkulær heliks**[8] gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

og temperaturen er gitt ved $u$ over. Hva er fluens opplevde temperaturforandring som funksjon av tiden? (Hint: Kjerneregelen.)

Det er for øvrig lett å produsere harmoniske funksjoner av to variable - bare splitt en deriverbar funksjon av en kompleks variabel i real- og imaginærdel.

$\boxed{15}$ Vis at disse er harmoniske dersom du antar at du kan derivere dem fritt.

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_function
[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Helix

## UKENS NØTTER

Her kommer en vanskelig en. Vi skal siden se hvorfor den er så vanskelig.

1 Finn en harmonisk funksjon med et topp- eller bunnpunkt.