2 - 9 - REELLE INDREPRODUKTROM

Et vektorrom kan være utstyrt med noe som kalles **indreprodukt**. Dette er en generalisering av skalarproduktet, som forteller noe om *hvor mye det er av én vektor i retningen til en annen.* La $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$ være vektorer, og a og b reelle tall. Her er aksiomene. Et indreprodukt er **symmetrisk**:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

positivt definitt:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \quad \text{dersom} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

og **lineært i første faktor**:

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Det er relativt lett å vise at et indreprodukt er lineært også i det andre argumentet:

$$(\mathbf{z}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = (a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{z}, \mathbf{x}) + b(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

Dette gjelder bare om a og b er reelle tall; er de komplekse må vi være litt forsiktige.

De to mest elementære indreproduktene er

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} \qquad \text{og} \qquad (x, y) = \int_c^d x(t)y(t)\, dt$$

for henholdsvis vektorer i $\mathbb{R}^n$ og kontinuerlige funksjoner fra $[c, d]$ til $\mathbb{R}$. Inntil videre er det disse to vi trenger, men det finnes mange andre indreprodukter.[1]

$\boxed{1}$ Sjekk at aksiomene er tilfredsstilt for disse to indreproduktene.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Inner_product_space

Siden indreproduktet er en generalisering av skalarproduktet, skriver vi likeledes $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$ for "lengden" av $\mathbf{x}$, og sier at vektorer er ortogonale dersom indreproduktet mellom dem er null. Det viser seg at mange av tingene vi utledet for skalarproduktet, kan utledes bare med de tre aksiomene over. Her er en liste over de viktigste.

1: Pytagoras' setning: $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er ortogonale hvis og bare hvis

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

2: Cauchy-Schwarz' ulikhet: $\quad |\,(\mathbf{x},\mathbf{y})\,| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$

3: Trekantulikheten: $\quad \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

4: Det er lett å dekomponere en vektor $\mathbf{x} \in V$ i en ortogonal basis for V:

$$\mathbf{x} = \sum_k \frac{(\mathbf{x},\mathbf{v}_k)}{(\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_k)}\mathbf{v}_k$$

5: Vektoren

$$\mathbf{z} = \sum_k \frac{(\mathbf{x},\mathbf{v}_k)}{(\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_k)}\mathbf{v}_k$$

er den vektoren i V som minimerer avstanden $\mathbf{x}-\mathbf{z}$ dersom $\mathbf{x} \notin V$.

Disse setningene brukes jevnt og trutt i de fleste fagfelt. MTELSYS og MTTK trenger dem i signalbehandling, og MTKJ i kvantefysikk.

$\boxed{2}$ Nå du prøve å utlede alle disse kun ved å bruke aksiomene for indreprodukt.

Resten av denne økten skal vi bruke på forskjellige anvendelser av indreproduktet. Den første er at vi kan bruke fun fact **4** over til å forstå "hvorfor" det periodiske signalet x kan skrives

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

der

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega t)\ dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\omega t)\ dt \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Jeg skriver "hvorfor" i hermetegn fordi summene går til uendelig og det introduserer noen problemer som vi bare hopper glatt over, se ukens nøtter.

$\boxed{3}$ Vis at

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega t)\sin(n\omega t)\ dt = \begin{cases} T/2 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega t)\cos(n\omega t)\ dt = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\ dt = \begin{cases} T & n = m = 0 \\ T/2 & n = m \neq 0 \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

for alle $m, n \in \mathbb{N}$, og forklar hvordan man kommer frem til formlene for a_n og b_n.

Det neste vi kan gjøre er å bruke fun fact **5** til å forstå at dersom du ønsker å bruke bare et endelig antall av sinusene over til å approksimere et signal x, gjør du klokt i å bare beregne fourierkoeffisientene over, og skrive

$$x(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

så lenge du måler approksimasjonsfeilen ved

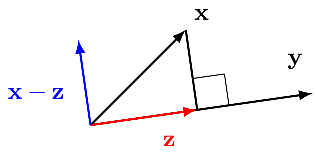
$$\|x - y\|^2 = (x - y, x - y)^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \left(x(t) - y(t)\right)^2\ dt.$$

Dette kalles L^2-**normen**, og er det vanligste målet på "avstanden" mellom to funksjoner.

$\boxed{4}$ Dette er i bunn og grunn en fetter av forrige uke. Forklar.

Indreproduktet $(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ forteller som sagt noe om $\mathbf{x}$ sin komponent i retningen til $\mathbf{y}$. La oss si at $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ i figuren til høyre er en basis for et rom, og så vil du ha en ortogonal basis for det samme rommet. Da kan du rette ut $\mathbf{x}$ litt. Denne ideen er grunnlaget for noe som kalles Gram-Schmidts metode.[a]

[a]Se https://en.wikipedia.org/wiki/Gram-Schmidt_process eller https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4115/2024v/notater/9-projeksjon.pdf



Dette er en smart teknikk for å skaffe seg en ortogonal basis dersom basisen man har ikke er det. Et annet navn er **QR-faktorisering**.[2]

$\boxed{5}$ Finn QR-faktoriseringen til

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{6}$ Finn P som ortogonalt diagonaliserer

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{7}$ Kjør Gram-Schmidt på polynomene $\{1, x, x^2, \cdots\}$. Dersom du gjør det dette og ganger med riktig konstant, skal du få ut legendrepolynomene.[3] Disse får vi du bruk for om du går MTKJ og skal regne på angulært moment i kvantefysikk, eller om du av en eller annen grunn må regne ut noen integraler numerisk med en helt syk presisjon.

Den rettlinjede lineærregresjonen i forrige uke, passer inn i denne uken dersom vi setter opp

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, g(x_k),$$

altså et indreprodukt mellom funksjoner der vi sampler funksjonene på gitterpunktene x_k.

$\boxed{8}$ Vis at dette nesten er et indreprodukt.
(Det er én liten ting som mangler, så teknisk sett blir dette et **semi-indreprodukt**. Fun factene over er gyldige for semi-indreprodukter med bittelitt modifikasjon, så det går bra.)

Regresjonskoeffisientene β_0 og β_1 kan utledes ved å finne en ortogonal basis for de første ordens polynomene med hensyn på dette indreproduktet, og så regne ut fourierkoeffisientene.

$\boxed{9}$ Prøv dette.
(Hint: Bruk Gram-Schmidts prosedyre på basisen $\{1, x\}$ med hensyn på indreproduktet over, og regn ut fourierkoeffisientene til responsvariabelens datapunkter y_k.)

[2]https://en.wikipedia.org/wiki/QR_decomposition
[3]https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials

Dersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortogonal vektormengde og i tillegg $\|\mathbf{v}_k\| = 1$ for alle k, sier vi at vektormengden er **ortonormal**.

$\boxed{10}$ Skjønte du figuren øverst på forrige side klarer du kanskje å utlede **Rodrigues formel**

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}\cos\theta + \mathbf{y} \times \mathbf{x}\sin\theta + \mathbf{y}(\mathbf{x}^T\mathbf{y})(1 - \cos\theta)$$

der $\mathbf{v}$ er $\mathbf{x}$ rotert vinkelen θ om enhetsvektoren $\mathbf{y}$.
(Hint: Projiser x på y, lag en gunstig ortonormal basis basert på $\mathbf{y}$ og $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ i figuren på forrige side, og bruk den todimensjonale rotasjonsmatrisen.)

Nå som du kan litt om projeksjon, er det litt enklere å få greie på hva kryssproduktet gjør.

$\boxed{11}$ Vis at dersom $\|\mathbf{y}\| = 1$ består $\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ av en projeksjon etterfulgt av en rotasjon.

Vi sier forvirrende nok at en matrise er ortogonal dersom kolonnene er ortonormale. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

har ikke ortonormale kolonner, men om du skalerer dem litt, får du en ortonormal matrise:

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ortogonale matriser roterer og speiler vektorer, og mengden av alle ortogonale $n \times n$-matriser kalles den **ortogonale gruppen**[4] $O(n)$. Dersom determinanten er 1 er det ren rotasjon, og mengden av disse kalles **den spesielle ortogonale gruppen** $SO(n)$.[5] Disse mengdene er eksempler på **Lie-grupper**, etter den norske matematikeren Sophus Lie. [6]

$\boxed{12}$ Hva skjer om du ganger B med B^T?

Hvis har en ortonormal basis for noe, kan du skrive opp Pytagoras' regel på en litt annen måte. Da kalles den gjerne **Parsevals sats**:

$\boxed{13}$ Vis at dersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortonormal vektormengde og

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k \qquad \text{er} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Tegn en figur som illustrerer denne i $\mathbb{R}^2$.

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_matrix
[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix
[6] Sophus Lie leverte seriøse bidrag til forståelsen av differensiallikninger, men det er kompliserte greier. Jeg skjønner ingenting av det: https://en.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie

UKENS NØTTER

Det er ikke innlysende at det går bra å bytte om på integrasjon og uendelig sum, og derfor vil vår "utledning" av fourierkoeffisientene heller ikke klassifisere som et ordentlig bevis.

$\boxed{1}$ la $f_n(t) = nt\left(1 - t^2\right)^n$. finn

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

for $0 \leq t \leq 1$, og regn ut

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\, dt \qquad \text{og} \qquad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt.$$

Se kap. 7 i rudin: principles of mathematical analysis for flere eksempler.

Om du synes det er artig med numerisk integrasjon, kan du sjekke ut **chebyshevpolynomene**. Disse er definert ved

$$T_n(x) = \cos\left(n \arccos(x)\right)$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{2}$ Vis at T_n er et polynom.
(Hint: Induksjon. Bruk regneregler for cosinusfunksjonen og studér $T_{n+1} + T_{n-1}$.)

Chebyshevpolynomene er ortogonale med hensyn på indreproduktet

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

$\boxed{3}$ Vis at dette er et indreprodukt.

Hvis du er nysgjerrig på hva dette kan brukes til, kan du se her:
`https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/ATAP/first6.pdf`