2 - 7 - BØLGE- OG VARMELIKNINGEN

En differensiallikning der den ukjente er en funksjon av flere variable, kalles en **partiell differensiallikning**. La u være en funksjon av to variable; en romlig koordinat x og tiden t. De partiellderiverte skrives

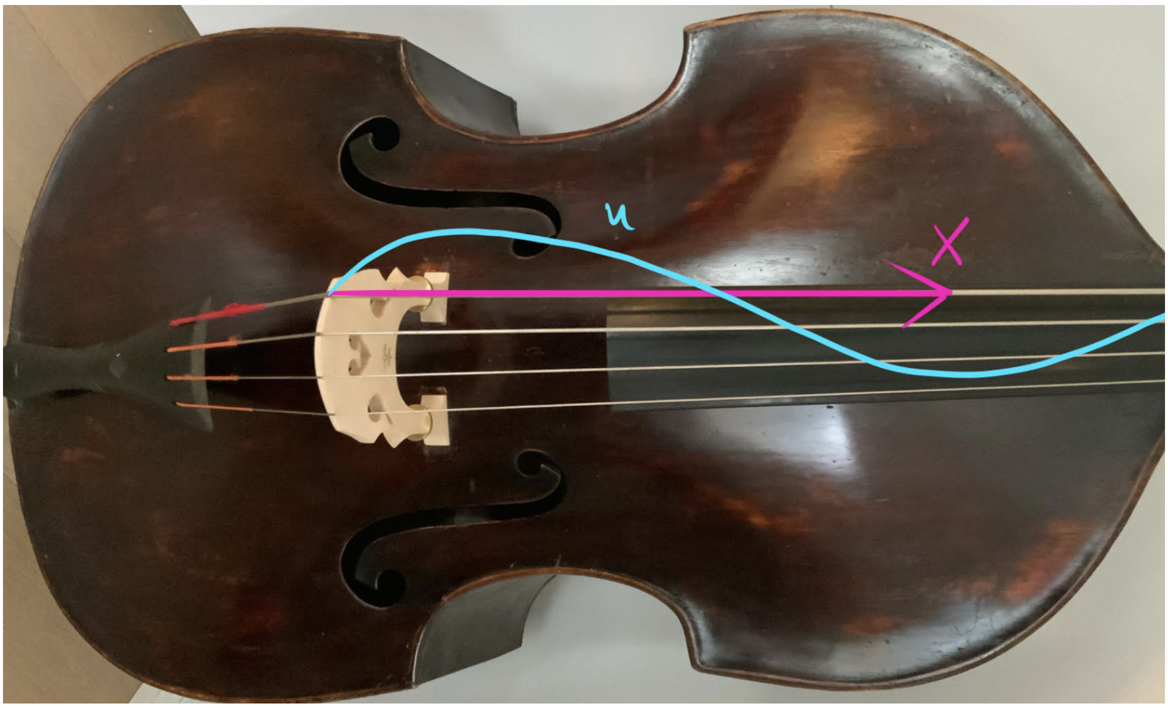
$$\nabla u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h} \qquad \text{og} \qquad \dot{u}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x,t+h)-u(x,t)}{h}$$

og leses henholdsvis "u derivert med hensyn på x" og "u derivert med hensyn på t". De dobbelderiverte skrives

$$\Delta u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{og} \qquad \ddot{u}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Den geometriske tolkningen av de partiellderiverte kommer an på den geometriske tolkingen av u, og denne kan være litt forskjellig alt etter hva vi skal bruke u til. I denne økten skal vi tenke på u som en eller annen målbar fysisk størrelse, for eksempel

- utslaget til en oppspent gitarstreng som vibrerer. Da blir $\dot{u}$ farten til et punkt på strengen, mens ∇u blir stigningen til kurven u med hensyn på x.
- temperaturen i en stang. I så fall er $\dot{u}$ tidsendringen til temperaturen i et punkt på strengen og ∇u temperaturgradienten.
- trykket i en stående trykkbølge i en orgelpipe eller en fløyte. Da blir $\dot{u}$ tidsendring i trykk, mens ∇u blir trykkgradienten.



Her er to viktige likninger:

Varmelikningen: $\dot{u}(x,t) = \alpha \Delta u(x,t)$ **Bølgelikningen** : $\ddot{u}(x,t) = c^2 \Delta u(x,t)$

Disse kan begge utledes med det du har i verktøykassen, så det skal vi gjøre.

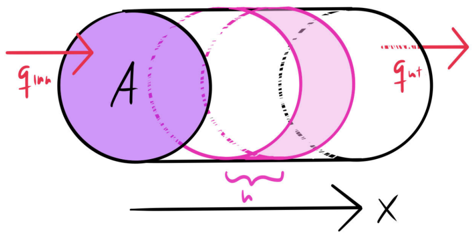
La oss begynne med varmelikningen. Tenk at du har en stang eller ledning eller noe med temperatur $T(x,t)$ og der varmen kun kan strømme i x-retningen, for eksempel ved at stangen er pakket inn i Glava. Fouriers varmelov sier at varmestrømmen q (målt i watt per kvadratmeter) over et tverrsnitt av stangen er proporsjonal med temperaturgradienten:

$$q = -k \nabla T(x,t)$$

Her er k er en konstant som kalles den **termiske konduktiviteten**.[1] La oss nå se på en liten bit av stangen, den mellom x og $x+h$. Endringen i bitens indre energi ved konstant volum er

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho c A h T(x,t)\right) = \rho c A h \dot{T}(x,t)$$

der ρ er massetettheten til materialet, A er tverrsnittet, og c er den spesifikke varmekapasiteten. Tidsendringen i denne varmeenergien må skyldes at varmeenergi strømmer inn og ut fra enten den ene eller andre siden, slik at



$$\begin{aligned}\rho c A h \dot{T}(x,t) &= A q_{\text{inn}} - A q_{\text{ut}} \\ &= -kA\nabla T(x,t) - (-kA\nabla T(x+h,t)) \\ &= kA\left(\nabla T(x+h,t) - \nabla T(x,t)\right)\end{aligned}$$

Hvis vi nå deler på h og lar $h \to 0$, får vi

$$\dot{T}(x,t) = \alpha \Delta T(x,t)$$

der alle fysiske konstanter er samlet sammen i α, som kalles den **termiske diffusiviteten**.[2] Hvis vi deler ut varmekapasiteten blir dette en likning for molar indre energi, som har symbol u. Dette er en bedre bokstav for ukjent, så jeg tror vi skriver

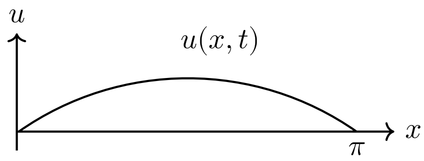
$$\dot{u}(x,t) = \alpha \Delta u(x,t)$$

fra nå av. Men du kan tenke temperatur om du vil, ihvertfall om du går elsys eller kyb.

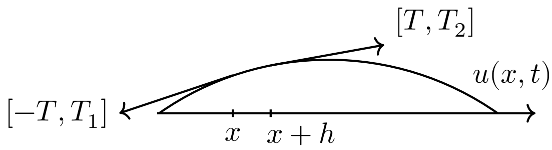
$\boxed{2}$ Denne utledningen må du kunne til eksamen.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_conduction
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_diffusivity

Og så bølgelikningen. Vi tenker at vi har en vibrerende streng med konstant massetetthet ρ (nå i kg/m) spent opp i $x = 0$ og $x = \pi$. La $u(x, t)$ være en funksjon som for hvert punkt x og hver tid t gir utslaget u fra likevektslinjen, som ligger langs x-aksen.



Vi tar en nærmere titt på strekkreftene på et lite stykke av strengen. Vi antar at tyngdekraften er neglisjerbar, og at strengen er helt elastisk, slik at strengestrekket, som virker parallelt med strengen, er eneste kraft. Vi antar at hvert punkt på strengen kun beveger seg loddrett, og at den horisontale komponenten av strengestrekket er konstant lik T:



Vi setter nå opp Newtons andre lov for den lille biten fra x til $x + h$. Massen til en bit med lengde h er ρh, og akselerasjonen til strengen i punktet x er $\ddot{u}(x, t)$. Kraften på biten er $T_2 + T_1$, slik at

$$h\rho\ddot{u}(x, t) = T_2 + T_1,$$

og deler vi på Th, får vi

$$\frac{\rho}{T}\ddot{u}(x, t) = \frac{T_2/T + T_1/T}{h} = \frac{\nabla u(x + h, t) - \nabla u(x, t)}{h}.$$

Lar vi til slutt $h \to 0$, får vi bølgeligningen

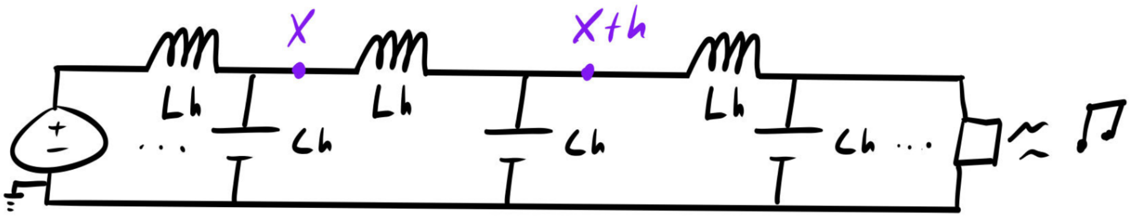
$$\ddot{u}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t),$$

der $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Denne har benevning meter per sekund og kalles **bølgefarten**.[3]

$\boxed{3}$ Også eksamen.
Til inspirasjon: `https://tv.nrk.no/serie/oeyeblikket/sesong/1/episode/8/avspiller`

[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/String_vibration`

Vitsen med å studere litt matematikk selv man ikke skal bli matematiker, er som alle vet at mange vidt forskjellige fysiske situasjoner beskrives av nøyaktig de samme matematiske likningene. For å illustrere skal jeg utlede bølgelikningen på nytt, men nå via spenning og strøm i en lang transmisjonslinje. La oss tenke at du har en spenningskilde og en last som sitter ganske langt borte. Hvis ledningen er lang nok,[4] vil den ha litt induktans per meter, og mellom ledningene vil det også være litt kapasitans per meter. Her er en illustrasjon:



For å modellere induktansen på ledningene og kapasitansen mellom dem, tenker vi at det sitter masse av små kondensatorer og spoler bortetter ledningsparet, slik som på figuren. Det kan sitte en last i enden av ledningsparet, men vi antar ingen motstand i selve ledningene. Spenning og strøm vil variere på linjene, og vi tenker på dem som funksjoner av to variable $v(x,t)$ og $i(x,t)$.

La L være ledningens induktans per meter, slik at induktansen til den lille spolen blir Lh. Spenningen i punktet $x+h$ er spenningen i punktet x minus det som går tapt over spolen:

$$v(x+h,t) = v(x,t) - Lh\frac{\partial i}{\partial t}$$

La likeledes C være kapasitans per meter, slik at kapasitansen over den lille kondensatoren blir Ch. Da er strømmen i $x+h$ lik strømmen i x minus det som det lekker ned via kondensatoren:

$$i(x+h,t) = i(x,t) - Ch\frac{\partial v}{\partial t}$$

Dersom vi reorganiserer disse likningene og lar $h \to 0$, får vi **telegraflikningene**:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t} \qquad\qquad \frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial v}{\partial t}$$

Dersom vi nå deriverer den første med hensyn på x og den andre med hensyn t og så antar at

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$$

(hvorvidt dette er sant kommer vi til), får vi at spenningen må tilfredsstille bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Tilsvarende gjelder for strømmen:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}.$$

$\boxed{4}$ Denne hadde vi på konten i fjor, gikk helt fint.

[4] https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_24.html

Så til løsning. Hvordan løser man en partiell differensiallikning? Vanligvis starter man med å bestemme seg for at man skal løse likningene på et begrenset intervall på x-aksen. Av hensyn til studentene pleier man å begynne med $[0, \pi]$, for da blir regningen enklest, og av samme grunn spesifiserer man randkravene

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

Dette betyr at strengen er spent opp i $x = 0$ og $x = \pi$, eller at temperaturen i stangen holdes ved null grader, og nå har vi nok informasjon til å sette i gang og regne.

En klassisk teknikk for å løse partielle differensiallikninger kalles **separasjon av variable** og består i å anta at løsningen kan skrives som et produkt av funksjoner av hver variabel:

$$u(x,t) = z(t)y(x)$$

$\boxed{5}$ Bruk definisjonen av partiellderivert til å vise at dersom

$$u(x,t) = z(t)y(x)$$

er

$$\dot{u}(x,t) = \dot{z}(t)y(x) \qquad \text{og} \qquad \nabla u(x,t) = z(t)y'(x).$$

$\boxed{6}$ Bruk separasjon av variable på både varme- og bølgelikningen og oppdag at du blir nødt til å løse **randverdiproblemet**

$$y''(x) - ky(x) = 0 \quad \text{og} \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

Konstanten k kalles **separasjonskonstanten**. Randverdiproblemet over har du verktøy nok til å løse, men det er litt uvant i starten. Man må begynne med å skrive opp den karakteristiske likningen til $y'' + ky = 0$ og skrive opp løsningene når $k > 0$, $k = 0$ og $k < 0$.

$\boxed{7}$ Bare ett av de tre valgene for k over gir løsninger som kan tilfredsstille randkravene $y(0) = y(\pi) = 0$. Finn ut hvilket, og skriv opp alle mulige løsninger.

Hvis du analyserte randverdiproblemet riktig, vil du nå ha kommet fram til at løsningene er

$$y_n(x) = b_n \sin(nx)$$

der b_n er en vilkårlig integrasjonskonstant og n er et naturlig tall. [5] Dette betyr at dersom både bølge- og varmelikningen med disse randkravene har løsninger på formen

$$u_n(x,t) = z(t)y_n(x) = z(t)\sin(nx)$$

og nå gjenstår det å finne z. (Jeg har latt $z(t)$ sluke integrasjonskontanten, for det kommer nemlig en til når vi finner z, og vi trenger ikke begge.)

$\boxed{8}$ Vis at for varmelikningen får vi

$$\dot{z}_n(t) + \alpha n^2 z_n(t) = 0,$$

slik at

$$u_n(x,t) = z_n(t)y_n(x) = b_n e^{-\alpha n^2 t}\sin(nx).$$

$\boxed{9}$ Vis for bølgelikningen at det finnes massevis av løsninger på formen

$$z_n(t) = a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)$$

og følgelig at det finnes massevis av **overtoner**

$$u_n(x,t) = (a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt))\sin(nx).$$

Nå er vi kommet omtrent til det punktet der Joseph Fourier [6] begynte å slite.

$\boxed{10}$ Vis at dersom vi skal ha $u(x,0) = f(x)$ for varmelikningen, må vi ha

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Joseph Fouriers store oppdagelse var formelen for koeffisientene b_n. Eller rettere sagt, andre kjente til formelen, men Fourier kom på den sprø ideen om at du kunne skrive

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

på $[0,\pi)$. Merk at x er skrevet som en lineærkombinasjon av sinuser. Sinusfunksjonene i uttrykket over er nemlig en ortogonal basis for noe. Nettopp hva skal vi komme tilbake til.

[5] Merk at vi har fått **kvantifisering**, som i skyldes at vi har et begrenset intervall og randkrav. Dette skal vi komme tilbake til i kvantefysikken mot slutten av semesteret.

[6] Joseph Fourier ble satt i fengsel under den franske revolusjon, dro til Egypt med Napoleon Bonaparte, og regnes som oppdageren av drivhuseffekten. Han oppfant også fourierrekker. De satte opp en statue av ham i hjembyen Auxerre i 1849, men den ble visst rekvirert av staten og smeltet om under andre verdenskrig.

UKENS NØTTER

Hvis du hiver ut randkravene og heller sier at bølge- og varmelikningen skal løses på hele $\mathbb{R}$, må du gå litt annerledes til verks. Bølgelikningen har mange løsninger; for eksempel passer

$$u(x,t) = v(x-ct) + w(x+ct)$$

i bølgelikningen uansett hva v og w er så lenge begge er to ganger deriverbare.

$\boxed{1}$ Sjekk dette, og gi en fysisk tolkning.

$\boxed{2}$ Bruk oppgaven over samt

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{og} \qquad \dot{u}(x,0) = g(x)$$

til å sette opp likningssystem for f og g. Gauss litt, integrer, og utled D'Alemberts formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(t)\,dt.$$

Det går an å løse varmelikningen på hele $\mathbb{R}$ også, men det må vi vente med.