TMA4101/4106/4111/4121

2 - 5 - INDREPRODUKTROM - LF

$\boxed{1}$ Under vår elskede coronapandemi kjørte jeg dette inn på video: `https://ntnu.cloud.panopto.eu/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=996df708-18f0-4319-bdbd-acd00068f723`

$\boxed{3}$ Dette finner du også i videolenken over.

$\boxed{4}$ Siden

$$\frac{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|}{\|\mathbf{y}\|} = |a| \leq \|\mathbf{x}\|$$

kan vi gange opp med $\|\mathbf{y}\|$ og få

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

(Husk at $\|\mathbf{y}\| > 0$, så vi trenger ikke bekymre oss for noen fortegnsgreier når vi ganger opp.)

$\boxed{5}$ Vi kjører på

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2
\end{aligned}$$

og så er det bare å ta kvadratroten:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

$\boxed{6}$ Argumentet er generisk; vi skriver

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$$

og prikker med $\mathbf{y}_1$ på begge sider

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_1 = c_1\mathbf{y}_1\cdot\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2\cdot\mathbf{y}_1$$

og bruker ortogonaliteten

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_1 = c_1\mathbf{y}_1\cdot\mathbf{y}_1$$

og deler på $\mathbf{y}_1\cdot\mathbf{y}_1$:

$$c_1 = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1\cdot\mathbf{y}_1}$$

Utledningen av

$$c_2 = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_2}{\mathbf{y}_2\cdot\mathbf{y}_2}$$

er identisk.

$\boxed{7}$ Vi lar

$$P = \frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^T}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}.$$

Nå kan du selv sjekke at

$$P\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}\mathbf{y}$$

ved å sette

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

og gange ut

$$\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}\mathbf{y} \qquad \text{og} \qquad \frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^T}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}\mathbf{x}$$

og sjekke at det blir det samme.

$\boxed{8}$ La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Dersom vi ganger systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ fra venstre med A^T, får vi $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$. Men

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

som er kjappere å regne ut for hånd enn gausseliminasjon. Ikke at du skal regne så mye for hånd i ditt liv, men artig lell.

$\boxed{10}$ La de ortogonale vektorene hete $\mathbf{v}_k$, der $1 \leq k \leq n$. Vi har

$$\mathbf{v}_k^T\mathbf{v}_l = \begin{cases} \|\mathbf{v}_k\|^2 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Vi må sjekke at likningen

$$\mathbf{0} = \sum_{k=1}^{n} c_k\mathbf{v}_k$$

impliserer at $c_k = 0$ for alle k. Men om vi tar skalarproduktet med $\mathbf{v}_l$ får vi

$$0 = \mathbf{v}_l^T\mathbf{0} = \mathbf{v}_l^T\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\mathbf{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k\mathbf{v}_l^T\mathbf{v}_k = c_l\mathbf{v}_l^T\mathbf{v}_l = c_l\|\mathbf{v}_l\|^2.$$

Siden $\mathbf{v}_l$ ikke er nullvektoren, må $\|\mathbf{v}_l\|^2 \neq 0$, og følgelig er $c_l = 0$.

$\boxed{11}$ Vi prikker med $\mathbf{v}_l$, bruker ortogonaliteten, og får

$$\mathbf{v}_l^T\mathbf{x} = \mathbf{v}_l^T\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\mathbf{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k\mathbf{v}_l^T\mathbf{v}_k = c_l\mathbf{v}_l^T\mathbf{v}_l$$

som gir

$$c_l = \frac{\mathbf{v}_l^T\mathbf{x}}{\mathbf{v}_l^T\mathbf{v}_l}$$

$\boxed{13}$ Lett! projeksjonen av $\mathbf{z}$ i planet utspent av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$

$$\mathbf{z}' = \frac{\mathbf{v}_1^T\mathbf{z}}{\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}_2^T\mathbf{z}}{\mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2$$

Skal du skjønne hvorfor, må du forstå resonnement som kommer etter denne oppgaven i økten.