2 - 3 - FOURIERANALYSE I

Laurentius Lie plages. Strømmen er gått på grunn av en solstorm, og det er ingenting å finne på. Livet uten elektrisitet er meningsløst, synes han. Derfor bestemmer han seg for å drukne sine sorger i pilsnerøl. Men han har ikke pilsnerøl, for i butikken virker ingenting nå som strømmen er gått. Alt han har er noen sekker med malt og en bok om brygging han kjøpte under en midtlivskrise for noen år siden.

Han går igang. Men så er det det med temperatur. Pilsnerøl skal gjæres i tre uker på ti grader, men Professor Lie har ikke tilgang på denne temperaturen. Alt han har tilgang på er null grader verandaen, og tjue grader i stuen. Kjerringa hans Laurinda er fra Brasil og nekter å ha ti grader i stuen; altså blir han nødt til å sette gjæringsdunken inn og ut på verandaen i tre uker. Det går nok bra, det er jo ingenting annet å finne på uansett.

Vi antar at temperaturen $x(t)$ i Professor Lies gjæringsdunk kan modelleres ved Newtons avkjølingslov. I så fall må vi veksle mellom de to differensiallikningene

$$\dot{x}(t) = \alpha\,(20 - x(t))$$

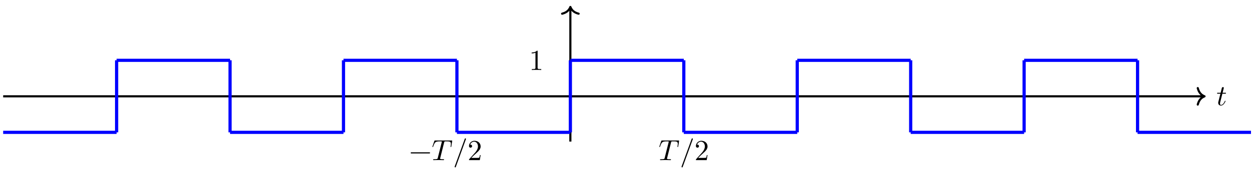
når dunken står i stuen og

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t)$$

når dunken står på verandaen. Vi kaller tiden mellom to flyttinger $T/2$.

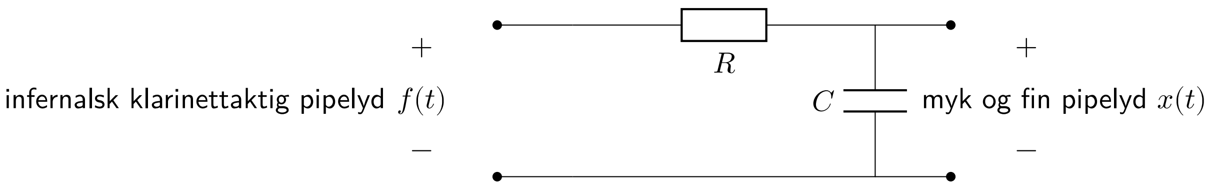
$\boxed{0}$ Dette kan like gjerne modelleres med én differensiallikning $\dot{x}(t) + \alpha x(t) = f(t)$. Skisser f.

Professor Lie har en batteridrevet timer som forteller ham at det er på tide å flytte gjæringsdunken. Men han plages, for timeren signaliserer at tiden er omme med en infernalsk stygg pipelyd. Pipelyden er stygg fordi den er en firkantbølge:



Forskjellige bølgeformer låter forskjellig, og firkantbølgelyd låter omtrent som en klarinett. Du kan lese om forskjellige bølgeformer og høre på dem her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Waveform`

Professor Lie ønsker å installere et analogt lavpassfilter på timeren for å få myket opp den forferdelige klarinettlyden. Et lydsignal representeres ved en spenning så lenge det befinner seg inne i stereoanlegget og ikke har kommet ut gjennom høyttaleren ennå, så han bestemmer seg for å sende pipetonen gjennom følgende krets:



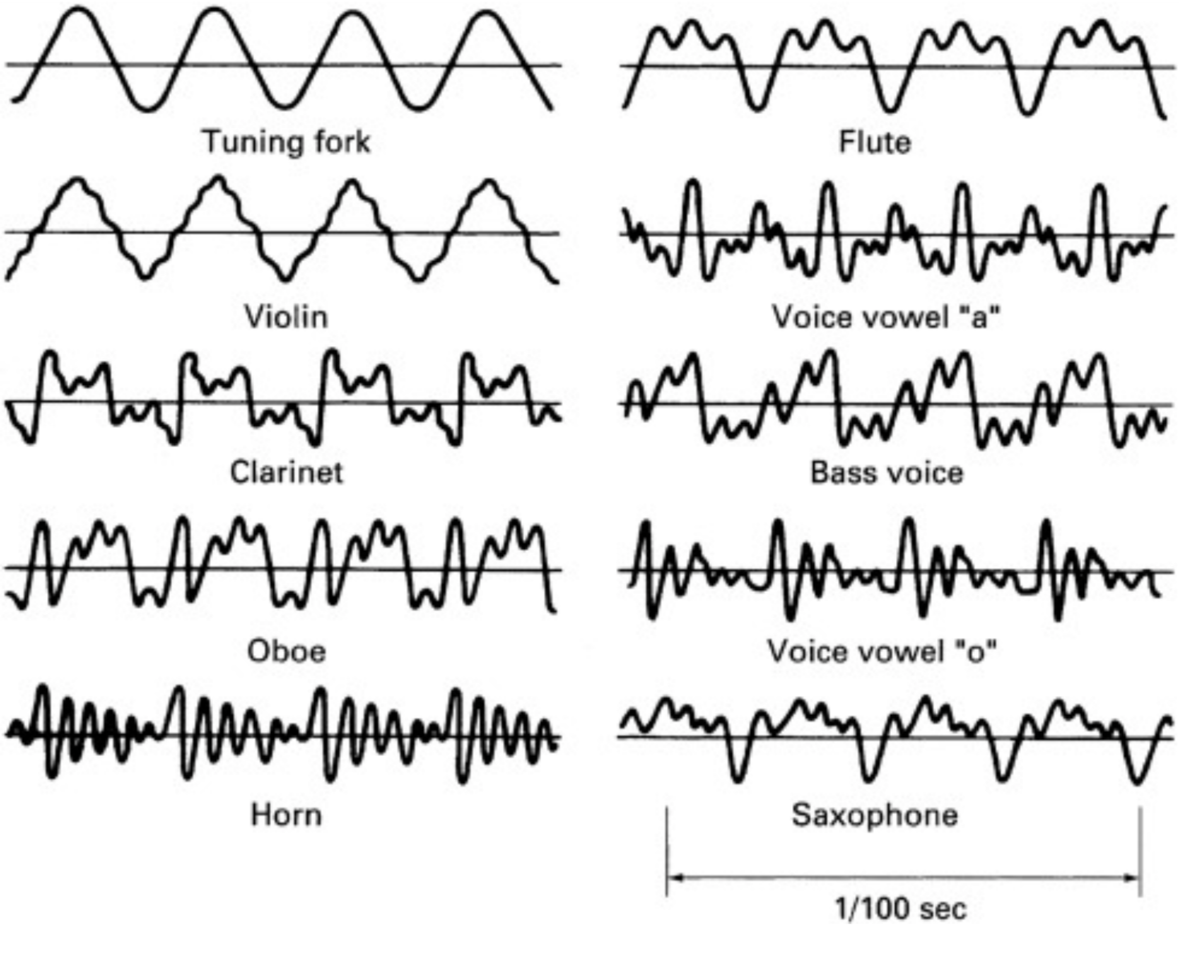
$\boxed{1}$ Finn differensiallikningen som gir x.

Svaret på forrige oppgave er

$$\dot{x} + \frac{1}{RC}x = f$$

og forhåpentligvis er du enig i at denne problemstillingen er identisk med Newtons avkjølingslov på gjæringsdunken. Begge er det samme LTI-systemet påtrykt noe som er formet som en firkantbølge. Spenningen x ut av kretsen vil oppføre seg nøyaktig som temperaturen i gjæringsdunken, mens det infernalske klarinettaktige spenningssignalet som går inn i kretsen, er analogt til vekslingen mellom inne- og utetemperaturen i Professor Lies residens.

For å forstå hvordan vi skal håndtere dette problemet, må vi vite noe om **periodiske funksjoner**. Periodiske fenomener er enormt viktige. For tiden er vi for eksempel inne i en fase av jordens historie der små periodiske variasjoner i jordbanens eksentrisitet og rotasjonsaksens presesjon har mye å si for klimaet.[1] Det er derfor vi har istider[2] som har gått av og på med omtrent hvert hundre tusende år de siste to-tre millioner år.[3] Her er noen andre eksempler på periodiske funksjoner:



https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/middle-c

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Milankovitch_cycles
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Ice_age
[3] Karbondioksidet vi spyr ut i atmosfæren nå har visst forskjøvet den neste istiden med femti tusen år eller deromkring.

Når en forfyllet oboist gir stemmetonen på 442 Hz begynner molekylene i området rundt obomunningen å dytte på hverandre og en periodisk trykkbølge sprer seg i rommet. At frekvensen er 442 Hz betyr i grove trekk at trykkbølgens bølgetopper treffer trommehinnen din 442 ganger i sekundet.

$\boxed{2}$ Eller? Hvor er oboens bølgetopp?

Det som er lett å se på bølgeformene over, er at de alle har noe vi kan kalle en grunnfrekvens og en grunnperiode. Selv om det ikke er så lett å se hvor oboens bølgetopp sitter, gjentar obosignalet seg på en periodisk måte. En vanlig definisjon er at et signal x er **periodisk** med **periode** T dersom

$$x(t+T) = x(t)$$

for alle t. Men dersom T er en periode er også $2T$ og $3T$ og $4T$ perioder, og så videre, så et periodisk signal har alltid mange perioder. Den minste av dem kalles kalles **fundamentalperioden** til x. Dersom fundamentalperioden er T, sier vi at x er T-periodisk.

$\boxed{3}$ Marker fundamentalperiodene i alle bølgeformene i figuren over.

Forholdet mellom fundamentalperioden T og **grunnfrekvensen** f er

$$f = \frac{1}{T}$$

Enheten for vinkelfrekvens er Hz, altså bare "per sekund". I de fleste realfag foretrekker man å heller forholde seg til forholdet mellom fundamentalperioden T og **vinkelfrekvensen**

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

siden radianer er vårt foretrukne vinkelmål. Enheten for vinkelfrekvens er radianer per sekund.

$\boxed{4}$ Signalene i figuren har alle omtrent samme frekvens på 100 Hz. Finn vinkelfrekvensen.

Nå skal vi prøve å finne et fornuftig funksjonsuttrykk for firkantbølgen:

$\boxed{5}$ Skriv pythonscript som plotter funksjoner av typen

$$S_N = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t$$

for forskjellige verdier av N. Hva skjer når $N \to \infty$? Og hva er ω?

På et strengeinstrument kan du se bølgeformen med dine egne øyne hvis du har et slow motion camera. Hvis du ikke har et slikt og et strengeinstrument, har rikskringkastingen filmet Glenn her:
`https://tv.nrk.no/serie/oeyeblikket/sesong/1/episode/8`
Legg merke til hvordan den strengen som vibrerer fritt går like fort frem og tilbake, mens den han stryker på går fort den ene veien og sakte den andre veien. Sistnevnte skjer fordi vi har en såkalt stick-slip-bevegelse,[4] og bevegelsen har en matematisk abstraksjon som kalles en **sagtannbølge**. Vi kan finne et fornuftig funksjonsuttrykk for denne også:

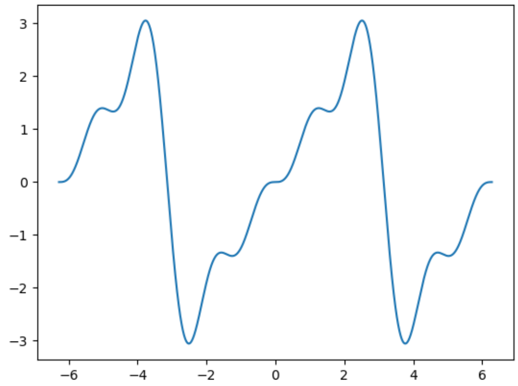
$\boxed{5}$ Skriv pythonscript som plotter funksjoner av typen

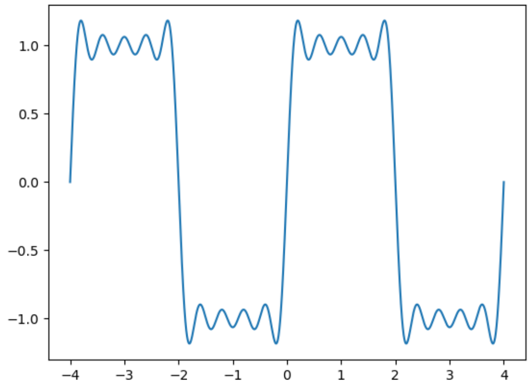
$$S_N = 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$$

for forskjellige verdier av N.

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Stick-slip_phenomenon`

Hvis du plotta riktig over, fikk du forhåpentligvis noe slikt:





Og nå tror jeg vi enkelt og greit bare slenger ut poenget. En ingeniør kan alltid skrive et T-periodisk signal x slik:[5]

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Koeffisientene a_n og b_n beregnes slik:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega t)\ dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\omega t)\ dt \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

De som har sans for det vakre og abstrakte, kan bruke den mer praktiske formen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

der

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-in\omega t}\ dt \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Denne sier akkurat det samme, men på en måte som er mye enklere å huske. Summene på denne siden kalles **fourierrekker**, og a_n, b_n og c_n kalles **fourierkoeffisientene**.

$\boxed{6}$ Den komplekse varianten er helt klart lettest å utlede. Vis at

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t}e^{-im\omega t}\ dt = \begin{cases} T & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

og bruk dette til å forklare at dersom

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad \text{er} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-in\omega t}\ dt.$$

[5] Jeg sier "ingeniør", for vi matematikere kan ikke alltid mene dette i fullt alvor. Dette kommer vi tilbake til mot slutten av semesteret.

Alt som står på forrige side, kalles **fourieranalyse**. Dette er kjempeviktig. Fourieranalyse brukes i fysikk, signalprosessering, bildebehandling, sannsynlighetsregning, kryptografi, akustikk, proteinstrukturanalyse, telekommunikasjon, tallteori, og mye mye annet. Diskomusikk, spektroskopi og strømprisprediksjon hadde vært utenkelig uten fourieranalyse. Poenget er at

$$\begin{aligned}\text{den infernalske klarinettaktige pipelyden } f(t) &= \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n-1}e^{(2n-1)it}.\end{aligned}$$

Leddene

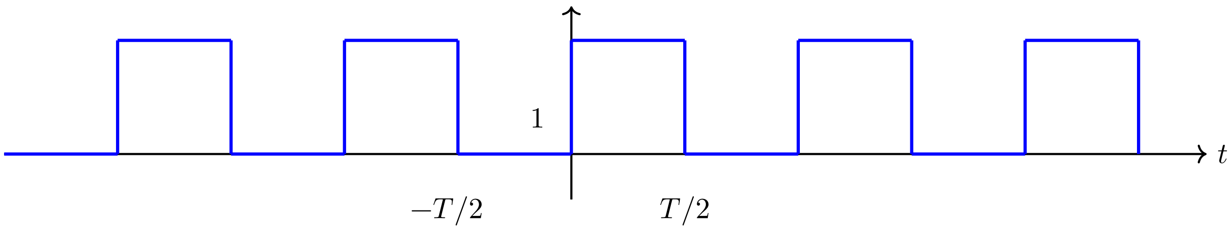
$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t$$

kalles **overtoner**, for det er faktisk det det er. Man sier også **dei overharmoniske**. Alle som har spilt et blåseinstrument vet at dersom man trykker inn noen klaffer eller ventiler, holder dem og så bare regulerer tonehøydene med leppetrykket, får man ut et bestemt sett med frekvenser som kalles naturtonerekken. Dette kalles å "spille på overtoner", og er også mulig å få til bare med buen på et strykeinstrument, men vanskeligere å få til. Bruker du venstrehånden til å dempe bestemte overtoner på et strengeinstrument, kalles det "flageolett". [6] Du kan lese om firkantbølgen her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Square_wave`
Merk spesielt det lydsporet som legger på nye overtoner hvert sekund:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Square_wave#Characteristics_of_imperfect_square_waves`
Det begynner med en behagelig sinustone, og så blir det mer og mer infernalsk og klarinettaktig etterhvert som overtonene slenges på.

Alt dette er forresten oppkalt etter Joseph Fourier.[7] Han satt i fengsel under den franske revolusjon, dro til Egypt med Napoleon Bonaparte, og regnes som oppdageren av drivhuseffekten. Han oppfant også det vi nå kaller fourierrekker, men i forbindelse med arbeid på varmelikningen, ikke periodiske signaler. De satte opp en statue av ham i hjembyen Auxerre i 1849, men den ble visst rekvirert av staten og smeltet om til ammunisjon under andre verdenskrig. La oss nå regne ut noen flere fourierrekker. Firkantbølgen er den T-periodiske utvidelsen av

$$x(t)=\begin{cases}0 & -T/2\le t<0\\ 1 & 0\le t<T/2\end{cases}$$

og ser sånn ut:



$\boxed{7}$ Finn den reelle og den komplekse fourierrekken til firkantbølgen og plot partialsummer python for dobbeltsjekke at du har regna riktig.

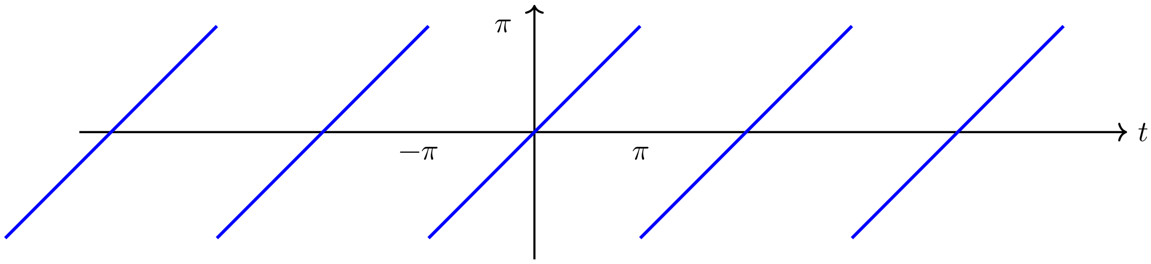
[6] Å spille på naturtonerekken er av en eller annen grunn legitimt på messinginstrumenter, men ikke på treblåsinstrumenter. Jeg har prøvd å spille fagott en gang og det var grusomt, for man måtte slå opp i en svær tabell hver gang man skulle lære en ny tone.

[7] `https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier`

Nå har du forhåpentligvis skjønt poenget med T og ω, så på de neste to setter vi $T = 2\pi$ så det ikke blir så mye griseri. Sagtannbølgen er gitt ved den 2π-periodiske utvidelsen av

$$x(t) = t$$

og ser sånn ut:



8 Finn den reelle og den komplekse fourierrekken til sagtannbølgen.
(Tips: Det kan være lurt å splitte integralet

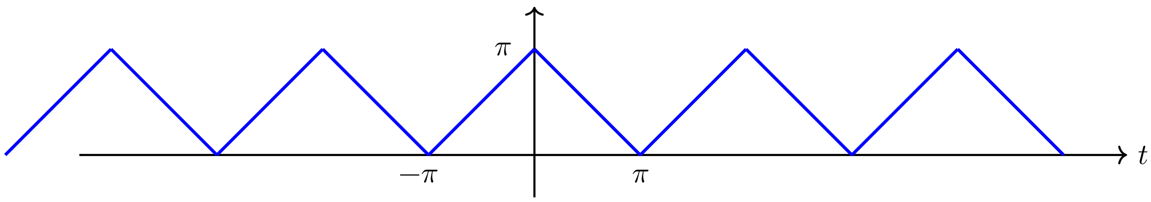
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt - i\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right)$$

og utnytte at $f(t) = t$ er en odde funksjon. Da blir regningen litt enklere.)

Trekantbølgen er gitt ved den 2π-periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} \pi + t & -\pi \le t < 0 \\ \pi - t & 0 \le t < \pi \end{cases}$$

og ser slik ut:



Mange ingeniører vil uten å kjenne noen smerte påstå at firkantbølgen er den deriverte til trekantbølgen, og matematikere river seg i håret av slikt. Men det går bra, du kan tenke slik om du vil.

9 Finn fourierrekken til trekantbølgen og plott på intervallet $[-5\pi, 5\pi]$.
(Tips: Her kan det likeledes være lurt å utnytte at f er en jevn funksjon.)

10 Etter å ha gjort de to siste oppgavene, vil du kanskje sette pris på formlene

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \qquad a_n = c_n + c_{-n} \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

for $n \in \mathbb{N}$. Utled.
(Hint: lettest ved å se på formlene for fourierkoeffisientene.)

Nå kan vi faktisk løse differensiallikningene vi startet med og mer til. Det enkleste er vel å laplace-transformere, og få

$$sX + \frac{1}{RC}X = F$$

og observere at transferfunksjonen eller systemfunksjonen eller overføringsfunksjonen eller hva det nå heter er

$$H(s) = \frac{RC}{RCs + 1}$$

slik at frekvensresponsen blir

$$H(i\omega) = \frac{RC}{RCi\omega + 1}.$$

og

$$\begin{aligned}\text{mykere pipelyd } y(t) =& \frac{RC}{2} + \frac{1}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H(i(2n-1))}{2n-1} e^{(2n-1)it} \\ =& \frac{RC}{2} + \frac{1}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{RC}{(2n-1)(RCi(2n-1)+1)} e^{(2n-1)it}.\end{aligned}$$

Her satte jeg $\omega = 1$ for at det ikke skulle bli så mye griseri, men du kan finne uttrykket for vilkårlige ω ved å ta rekken fra oppgave 7 og bruke transferfunksjonen på samme måte.

$\boxed{11}$ Finn elsys-student og bruk digilenten til å kjøre et klokkesignal gjennom et lavpassfilter. Det finnes visst en funksjon som gjør at man kan lytte til resultatet.

Nå ser vi for øvrig hvorfor kretsen kalles et lavpassfilter. Et raskt blikk på transferfunksjonen viser at den helt klart demper høye frekvenser mer enn lave.

$\boxed{12}$ Plott amplituden til overtonene til x og f, altså absoluttverdiene av koeffisientene mot $\mathbb{Z}$.

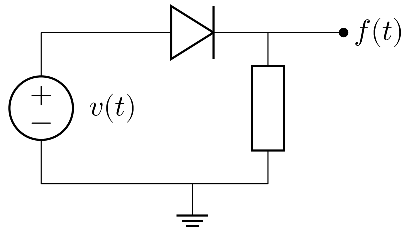
Vi kaller $|c_n|$ **amplituden** til overtone nummer n, og $\arg c_n$ for **fasen**. Likeledes kaller vi $|H|$ for **amplituderesponsen** og $\arg H$ for **faseresponsen**. Tidlig i elektrostudiet er de mest opptatt av amplituderesponsen, mens i impedansspektroskopi er det visst faseresponsen som gjelder.

$\boxed{13}$ Regn ut amplitude- og faserespons til Professor Lies lavpassfilter.

Fourierrekker er den matematiske beskrivelsen av funksjonene til det vi på folkemunne bare kaller "frekvenser". Dette er så fundamentalt for fysikk- og kjemiforståelse at det ikke er så godt å vite hvor man skal begynne om man skal fortelle om det:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Spectroscopy`
Atomer og molekyler oppfører seg i bunn og grunn ikke ulikt Professor Lies filter:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_line`
og absorpsjonsspekteret til hydrogenatomet var en av de observerte fenomenene som ledet til kvante-mekanikkrevolusjonen på 1920-tallet. Dette tar en stund å bli vant til, men Feynman forklarer det ganske folkelig:
`https://www.feynmanlectures.caltech.edu/III_toc.html`
Fourieranalyse er et smart inngangssteg dersom man ønsker å få en illusjon av forståelse for kvante-mekanikkformalismen. Vi skal studere Schrödingers berømte likning om noen uker.

$\boxed{14}$ Regn ut temperaturen i Professor Lies gjæringsdunk dersom han setter tanken ut og inn med perioden T. Du kan anta $x(0) = 20$.

UKENS NØTTER



Følgende krets kalles en **halvbølgelikeretter**. Denne er essensiell når noe som trenger likespenning skal forsynes med strøm fra stikkontakten i veggen, som leverer vekselspenning.

Dersom du mater inn et periodisk signal gitt ved

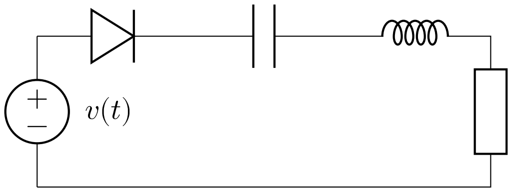
$$v(t) = \sin 100\pi t,$$

(strømmen i veggen har grunnfrekvens 50 Hz) blir utsignalet den $\frac{1}{100\pi}$-periodiske utvidelsen av

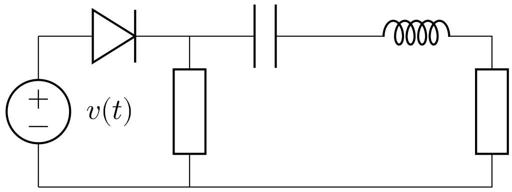
$$x(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{1}{100} \leq t \leq 0 \\ \sin 100\pi t & 0 < t < \frac{1}{100} \end{cases}$$

$\boxed{1}$ Finn fourierrekken til x og sett opp en likning for kretsen.

Disse kretsene kalles **frekvensfordoblere**:



og



om du vil.

$\boxed{2}$ Sett opp differensiallikninger for kretsene. (Den siste er ganske hårete.) Sett opp kretsene på brødbrettet eller kjør numerisk differensiallikningsløser i python, send inn noen frekvenser og se hva som skjer. Den ene av dem er bra og den andre er dårlig. Hvilken er bra?