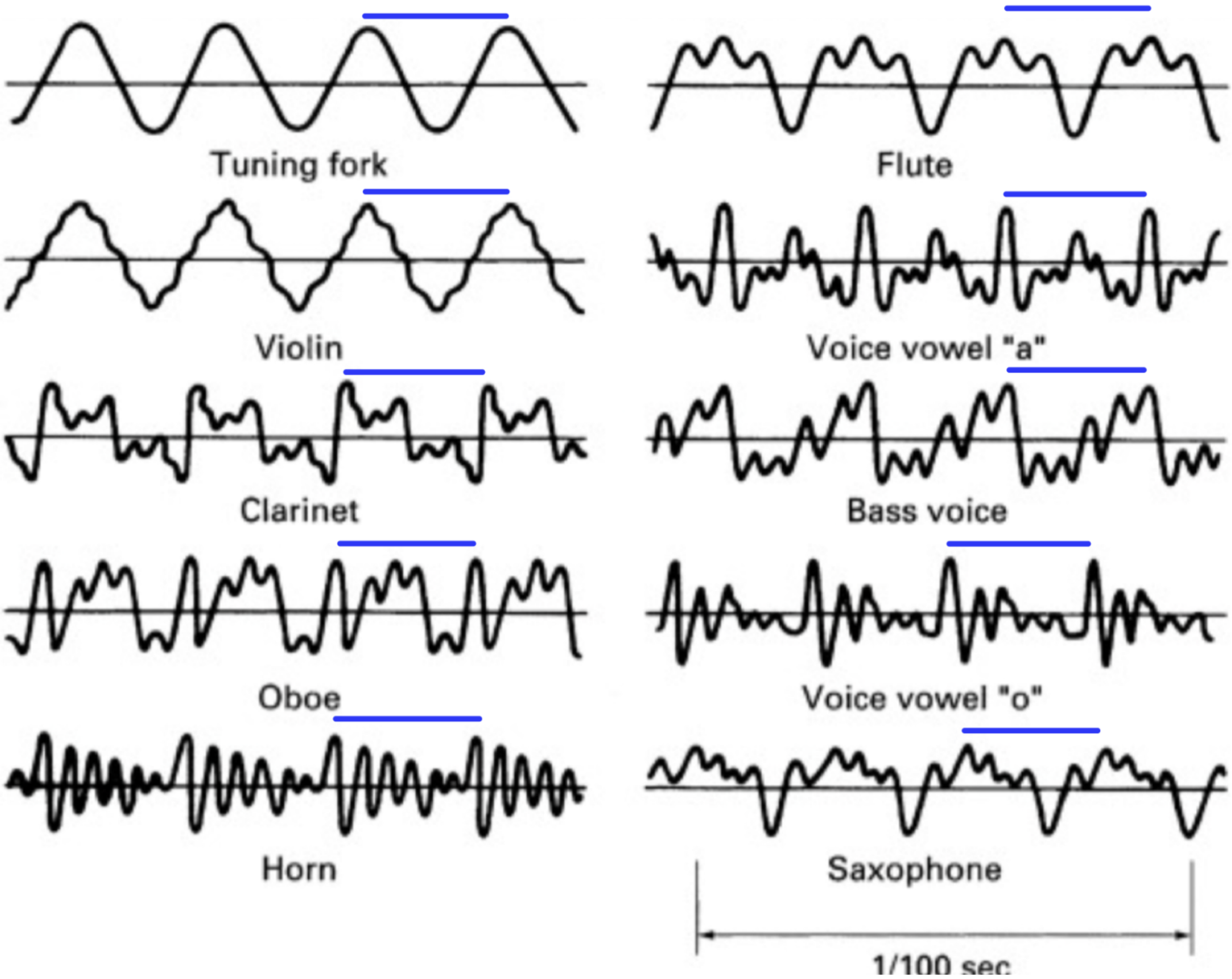
2 - 3 - FOURIERANALYSE I - LF

$\boxed{3}$



$\boxed{4}$ Hvis $f = 100$ hertz, blir $\omega = 2\pi f \approx 628$ radianer per sekund.

$\boxed{5}$ Du finner ymse koder som plotter fourierrekker her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/python/plotte/fourierrekker/`

$\boxed{6}$ Lett! Dersom $n = m$, får vi

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t}e^{-im\omega t}\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} dt = T$$

og dersom $n \neq m$, får vi

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t}e^{-im\omega t}\,dt = \frac{1}{i(n-m)\omega}e^{i(n-m)\omega t}\Big|_{-T/2}^{T/2} = 0$$

slik at

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t}e^{-im\omega t}\,dt = \begin{cases} T & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Nå tar vi likningen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

og ganger med $e^{-im\omega t}$ og integrerer:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-im\omega t} = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}e^{-im\omega t}\,dt$$

og så gjør Satan en egentlig ulovlig flytting av integraltegnet (siden summen går mot uendelig), slik at hen kan bruke ortogonaliteten og drepe alle ledd i summen unntatt ett:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-im\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t}e^{-im\omega t}\,dt = c_m \cdot T$$

slik at hun kan skrive

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-in\omega t}\,dt.$$

$\boxed{7}$ Firkantbølgen er gitt ved den 2π-periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < T/2 \end{cases}$$

Vi ser raskt at

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} \cos(n\omega t)\,dt = 0$$

for alle $n \geq 1$, mens

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} dt = 1$$

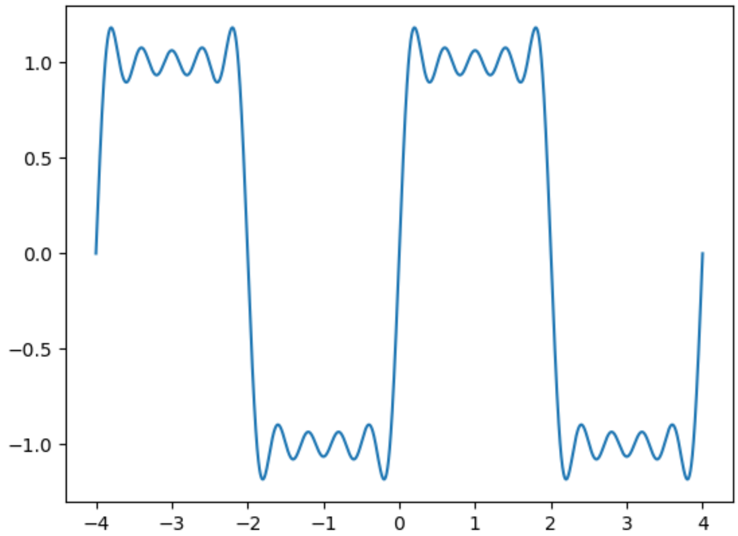
Videre kan vi beregne

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\omega t)\,dt \\ &= \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} \sin(n\omega t)\,dt \\ &= \frac{1}{n\pi}\left(-\cos(n\omega t)\right)\Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{1}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{odde } n \\ 0 & \text{jevne } n \end{cases} \end{aligned}$$

slik at

$$x(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\sin\left((2n+1)\omega t\right).$$

Vi skriver $\sim$ og ikke $=$ siden fourierrekken ikke tar den samme verdien som signalet i $t =$ heltallsmultipler av π. Her er plot av en partialsum:



Hvis vi vil ha rekken på kompleks form, kan vi enten regne ut fra scratch, eller bruke formlene

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \qquad a_n = c_n + c_{-n} \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

La oss ta det fra scratch. For $n = 0$ får vi

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt = \frac{1}{2},$$

mens for $n \neq 0$, får vi

$$\begin{aligned}
c_n =& \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-in\omega t}\, dt \\
=& \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} e^{-in\omega t}\, dt \\
=& -\frac{1}{2\pi in} e^{-in\omega t}\Big|_0^{T/2} \\
=& \frac{1}{2\pi in}\left(1 - e^{-\pi in}\right) \\
=& \frac{1}{2\pi in}\left(1 - \cos(n\pi)\right) = \begin{cases} \frac{1}{\pi in} & \text{odde } n \\ 0 & \text{jevne } n \end{cases}
\end{aligned}$$

slik at

$$x(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{(2n+1)i\omega t}.$$

$\boxed{8}$ Sagtannbølgen er gitt ved den 2π-periodiske utvidelsen av

$$x(t) = t.$$

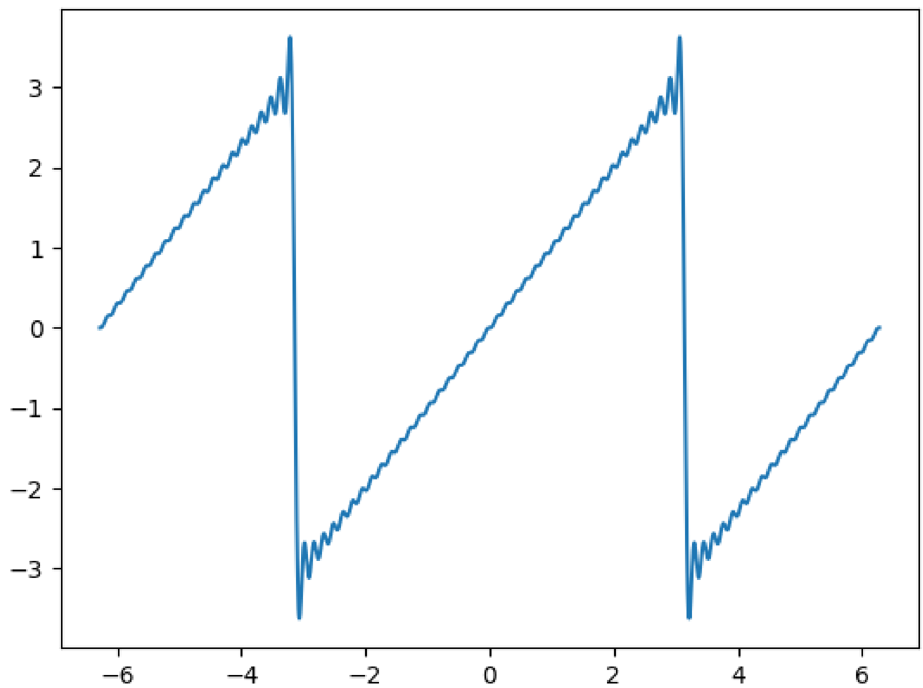
Siden den er en odde funksjon, blir $a_n = 0$ for alle n, og da er det ofte enkelt å beregne den reelle fourierrekken. Koeffisientene blir

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin(nt)\,dt \\
=& \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin(nt)\,dt \\
=& \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}t\cos(nt)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt\right) \\
=& \frac{-2}{n}\cos(n\pi) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

slik at

$$x(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)\,.$$

Her er plot av en partialsum:



$\boxed{9}$ Trekantbølgen er gitt ved den 2π-periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} \pi + t & -\pi \le t < 0 \\ \pi - t & 0 \le t < \pi \end{cases}$$

Denne er jevn, så vi vet at $b_n = 0$ for alle n. Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$$

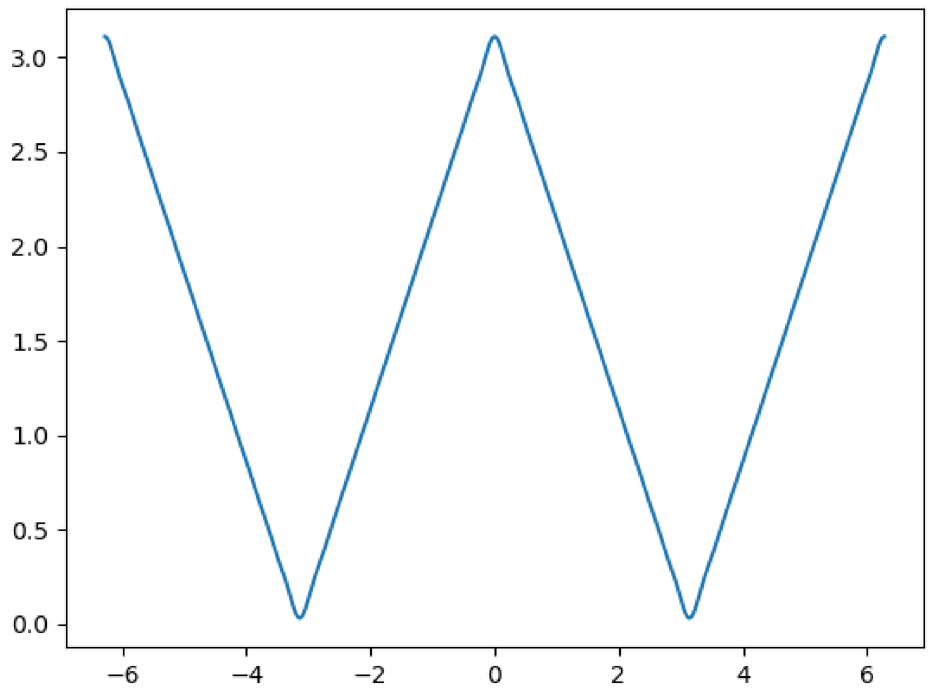
og

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(nt)\, dt \\ =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos(nt)\, dt \\ =& \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} (\pi - t) \sin(nt) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nt)\, dt \right) \\ =& \frac{2}{n^2\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi} & \text{odde } n \\ 0 & \text{jevn } n \end{cases} \end{aligned}$$

slik at

$$x(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\left((2n+1)t\right).$$

Her er plot av en partialsum:



$\boxed{10}$ Det enkleste er å ta det direkte fra koeffisientformlene. La n være et naturlig tall. Vi beregner

$$\begin{aligned} c_n =& \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-in\omega t}\ dt \\ =& \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\left(\cos\left(n\omega t\right) - i\sin\left(n\omega t\right)\right)\ dt \\ =& \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\left(n\omega t\right)\ dt - \frac{i}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin\left(n\omega t\right)\ dt = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} c_{-n} =& \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{in\omega t}\ dt \\ =& \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\left(\cos\left(n\omega t\right) + i\sin\left(n\omega t\right)\right)\ dt \\ =& \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\left(n\omega t\right)\ dt + \frac{i}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin\left(n\omega t\right)\ dt = \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right) \end{aligned}$$

Formler for den andre veien tar vi med gausseliminasjon. Legger vi sammen

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad \text{og} \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

får vi $a_n = c_n + c_{-n}$, og trekker vi dem fra hverandre, får vi $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

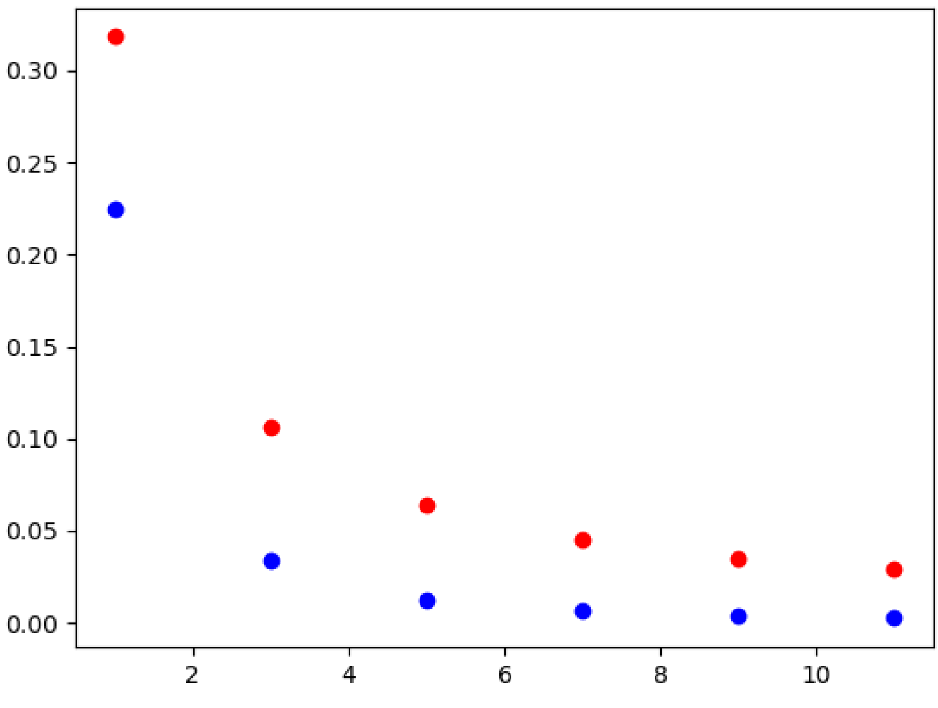
$\boxed{12}$ Amplitudene er absoluttverdiene til fourierkoeffisientene. Amplitudene koeffisientene til x er

$$\left|\frac{1}{\pi i}\cdot\frac{1}{2n-1}\right| = \frac{1}{\pi(2n-1)}$$

mens amplitudene til y er (jeg setter $RC = 1$ for enkelhets skyld)

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\pi i}\cdot\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{(2n-1)i+1}\right| &= \frac{1}{\pi(2n-1)}\cdot\left|\frac{1}{(2n-1)i+1}\right| \\ &= \frac{1}{\pi(2n-1)}\cdot\left|\frac{(2n-1)i-1}{(2n-1)^2+1}\right| \\ &= \frac{1}{\pi(2n-1)}\cdot\frac{\sqrt{(2n-1)^2+1}}{(2n-1)^2+1}\end{aligned}$$

Her er plot av amplituder (x er røde og y er blå) for $n = 1 \ldots 11$. Merk hvordan de blå overtone dempes mer og mer når n stiger.



$\boxed{13}$ Amplituderesponsen er

$$\begin{aligned}|H(\imath\omega)| =& \left|\frac{1}{RCi\omega+1}\right| \\ =& \left|\frac{-RCi\omega+1}{(RC\omega)^2+1}\right| \\ =& \frac{\sqrt{(RC\omega)^2+1}}{(RC\omega)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2+1}}\end{aligned}$$

mens faseresponsen er

$$\begin{aligned}\arg\left(H(\imath\omega)\right) &= \arg\left(\frac{1}{RCi\omega+1}\right) \\ &= \arg\left(\frac{-RCi\omega+1}{(RC\omega)^2+1}\right) \\ &= \arg\left(1-RCi\omega\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2+1}}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{14}$ Temperaturfirkantbølgen er

$$f(t) \sim 20\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{(2n+1)i\omega t}\right),$$

og difflikningen er

$$\dot{x}(t)+\alpha x(t) = f(t).$$

Laplacetransformen til likningen er

$$sX - x(0) + \alpha X = F$$

så transferfunksjonen blir

$$H(s) = \frac{1}{s+\alpha}.$$

Løsningen blir

$$\begin{aligned}x(t) =& x_h(t)+x_p(t) \\ =& ce^{-\alpha t}+\frac{10}{\alpha}+\frac{20}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{H\left((2n+1)i\omega\right)}{2n+1}e^{(2n+1)i\omega t} \\ =& ce^{-\alpha t}+\frac{10}{\alpha}+\frac{20}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\left((2n+1)i\omega+\alpha\right)}e^{(2n+1)i\omega t}\end{aligned}$$

og krever vi $x(0) = 20$, får vi

$$c = -\frac{10}{\alpha}+\frac{20}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\left((2n+1)i\omega+\alpha\right)}$$

hva nå enn dette er.