2 - 11 - FOURIEROMVENDING

Vi har lært at T-periodiske signaler stort sett alltid kan dekomponeres i overtoner:

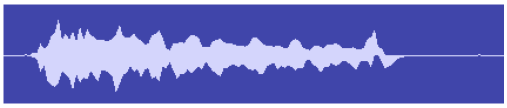
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-in\omega t}\,dt \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

og vi har beregnet fourierkoeffisientene c_n for noen teoretiske signaler. Dersom $T = 2\pi$ blir formlene mye penere:[1]

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-int}\,dt.$$

Siden all relevant informasjon om et T-periodisk signal finnes på intervallet $[-T/2, T/2]$, er det irrelevant om vi tenker at vi skal finne fourierrekken til det periodiske signalet $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eller funksjonen $x : [-T/2, T/2] \to \mathbb{R}$. Fourierkoeffisientene c_n bygges fra informasjon om x på $[-T/2, T/2]$, og fourierekken vil uansett ha grunnperiode T og repetere seg selv utenfor intervallet $[-T/2, T/2]$.

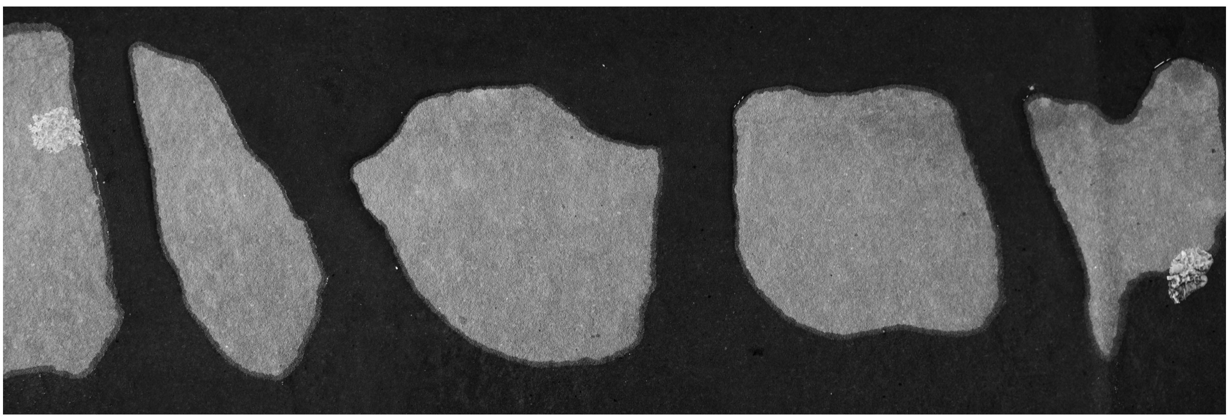
Men det er nå en liten catch. Et periodisk signal finnes ikke i virkeligheten; alle signaler dør ut på et eller annet tidpsunkt. Her er for eksempel bølgeformen til en enkelt G13-akkord på min gibson es-175 som jeg kjøpte når jeg var stipendiat. Dette lydsignalet er nok "omtrent" periodisk om du virkelig zoomer inn og ser på tre-fire perioder etter hverandre, men det bør være klart at et periodisk signal kun er en abstraksjon. La oss nå se litt på hvordan vi finner "fourierrekken" til et ikke-periodisk signal.



$\boxed{1}$ Finn fourierrekken til $y : [-T/2, T/2] \to \mathbb{C}$

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

for alle $T > 2$, og plot y og noen partialsummer på $[-T, T]$ for noen verdier av T.



[1] Huskeregelen er "two pints per period" for $2\pi int/T$.

La oss nå si at du ønsker å finne fourierrekken til for eksempel $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

eller et annet signal som er **tidsbegrenset**, altså at det starter og stopper et eller annet sted på tidsaksen. Er det mulig å skrive en slik realistisk faenskap som en fourierrekke? La oss prøve. Kanskje vi kan ta fourierrekken til y i oppgaven 1, og så la $T \to \infty$? Vi vet at

$$y(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

der

$$c_n\,(T) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-in\omega t} dt$$

La oss sette denne inn i fourierrekken:

$$y(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(s) e^{-in\omega s} ds \; e^{in\omega t}$$

og gange og dele med 2π:

$$y(t) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} y(s) e^{-in\omega s} ds \; e^{in\omega t} \omega$$

Den ytterste summen kan nå tolkes som en riemannsum der gitteravstanden er ω og gitterpunktene $n\omega$. Når $T \to \infty$ går gitteravstanden mot null, og dersom det er rettferdighet i verden, går $y \to x$ og summen mot et integral fra uendelig til uendelig:

$$x(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-i\omega s} ds \; e^{i\omega t} d\omega$$

Det innerste integralet kalles **fourieromvendingen** eller **frekvensinnholdet** til x, og skrives

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

Dette kan du tenke på som fourierkoeffisientene til signalet x, men siden signalet ikke er periodisk, trenger du mange mange mange flere frekvenser, og derfor blir

$$x(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

et integral istedet for en uendelig sum, slik vi er vant til når signalet er periodisk. Det siste integralet kalles **inversomvendingen** eller **rekonstruksjonen**.

$\boxed{2}$ Dette er en heuristisk utledning som ikke er spesifikk for x øverst på siden, men generell. Dette er det så og si ingen som ville kommet på av seg selv, så jeg kan komme til å spørre om den på eksamen. Jeg vet dessverre ikke om noen enklere måte å motivere fourieromvending på.

Vi skriver også

$$\widehat{x}(\omega) = \mathcal{F}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\, dt$$

for å understreke at fourieromvendingen er en operator som tar inn et signal og gir ut et annet. Det går an å føre et stringent bevis for at dersom x er et tilstrekkelig pent signal, er

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

men det er litt for hardt for oss. [2] Fourieromvending er ganske vanskelig å skjønne noe av i begynnelsen, men dersom du er komfortabel med fourierrekker og lineære systemer, er du nok godt rustet. Fourieromvending er helt ekstremt viktig i både matematikk og i et spektakulært utvalg forskjellige anvendelser: `https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform`
La oss nå regne ut et par omvendinger. Finn fourieromvendingen til

$\boxed{9}$ $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

(Sammenlikne med oppgave 2.)

$\boxed{10}$ $f(t) = \begin{cases} a & |t| < 1/2a \\ 0 & |t| \geq 1/2a \end{cases}$
Hva skjer når $a \to \infty$?

$\boxed{11}$ $x(t) = \begin{cases} \pi - |t| & |t| \leq \pi \\ 0 & \pi < |t| \end{cases}$
(Hint: lettest om du skriver $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$.)

$\boxed{12}$ $\delta(t)$

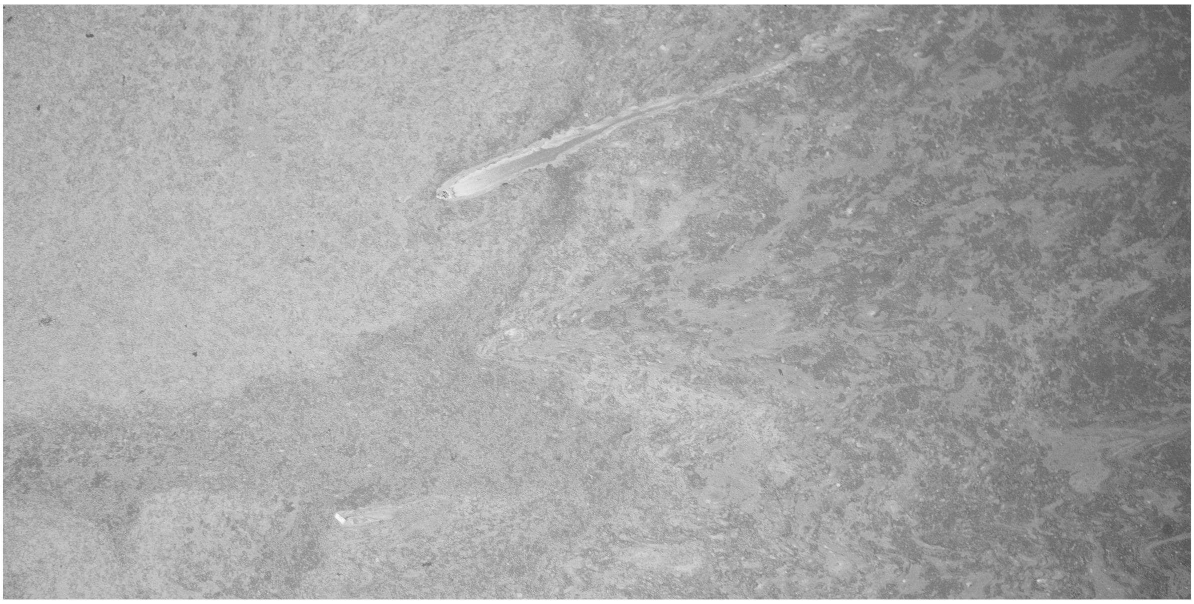
$\boxed{13}$ $f(t) = e^{-a|t|}$

$\boxed{14}$ $f(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$

$\boxed{15}$ $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

Notasjonen $X(\omega)$ istedet for $\widehat{x}(\omega)$ er innarbeidet i noen miljøer, men er riktigere å skrive $X(i\omega)$.

$\boxed{16}$ Hvorfor det?



[2] Les Elias Stein og Rami Shakarchis klassiker "Fourier Analysis" om du lurer på dette. Den finnes på nett.

Stemmer, fourieromvending er bare dobbeltsidig laplacetransform

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

evaluert i $s = i\omega$. Av den grunn er det vanlig å skrive

$$s = \sigma + i\omega$$

i laplacetransform, og jeg kommer derfor av prinsipp til å skrive $\widehat{x}(\omega)$ eller $X(i\omega)$ og ikke $X(\omega)$. Den store forskjellen på fourier- og laplacomvending er hva du putter inn og hva det brukes til. Vi laplaceomvender stort sett bare signaler på formen

$$x(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

og derfor skrives laplacetransform som regel

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt.$$

siden dette er underforstått. Vi fourieromvender derimot signaler som kan være forskjellig fra 0 overalt, men du kan ikke putte inn hva som helst. Et signal fra den virkelige verden må både starte og stoppe, og derfor er det naturlig å kreve at

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$$

for alle signaler du kommer til fourieromvende. Dersom vi skal være helt trygge på at

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

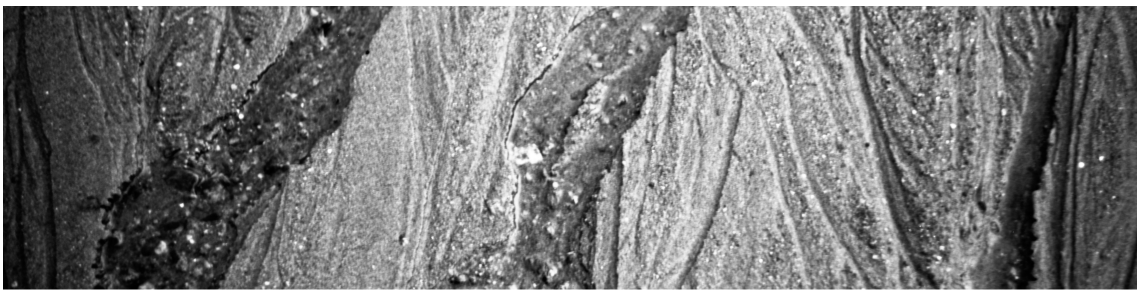
bør x være glatt og

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |t|^k \left|\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right| < \infty$$

for alle k og n. Funksjoner som tilfredsstiller dette kravet, utgjør et uendeligdimensjonalt vektorrom som kalles Schwartzrommet. Det går an å slakke på dette kravet, men da må alt baseres på en mer komplisert integrasjonsteori oppfunnet av Henri Lebesgue tidlig i det tyvende århundre. Vi har allerede fourieromvendt funksjoner som ikke tilhører Schwartzrommet. Det går nok bra.

Siden fourier er i slekt med laplace, er regnereglene like, men noen av dem blir litt annerledes siden vi putter inn signaler som går mot null når $t \to \pm\infty$. Prøv å utlede at

$\boxed{17}$ $\widehat{\dot{x}} = iw\widehat{x}$ $\boxed{18}$ $\widehat{x(t-\theta)} = e^{i\omega\theta}\widehat{x}$ $\boxed{19}$ $\widehat{e^{i\theta t}x(t)} = \widehat{x}\left(\omega - \theta\right)$ $\boxed{20}$ $\widehat{x(at)} = \frac{1}{|a|}\widehat{x}\left(\frac{\omega}{a}\right)$



I sannsynlighetsregningen kalles laplacetransform for **momentgenererende funksjon**, mens invers fourieromvending kalles **karakteristisk funksjon**.

$\boxed{21}$ Finn fourieromvending og karakteristisk funksjon til normalfordelingen.
(Hint: Begynn med standardnormalfordelingen. Du må nesten vite at

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = 1.$$

Dette skal vi regne ut i neste semester.)

Nå skal vi ta et gjensyn med Balchens foldingstriks

$$x(t) = x(0)e^{-at} + \int_0^t f(s)e^{-a(t-s)}\,ds$$

som løser initialverdiproblemet $\dot{x} + ax = f$, $x(0) = x_0$. Integralet på høyresiden dukker til stadighet opp i studiet av LTI-systemer og det kalles **folding** eller **konvolusjon**. Det er et slags produkt mellom funksjoner, og den generelle definisjonen er

$$x * y = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)y(t-s)\,ds.$$

For signaler som er 0 når $t < 0$ reduserer konvolusjonen til

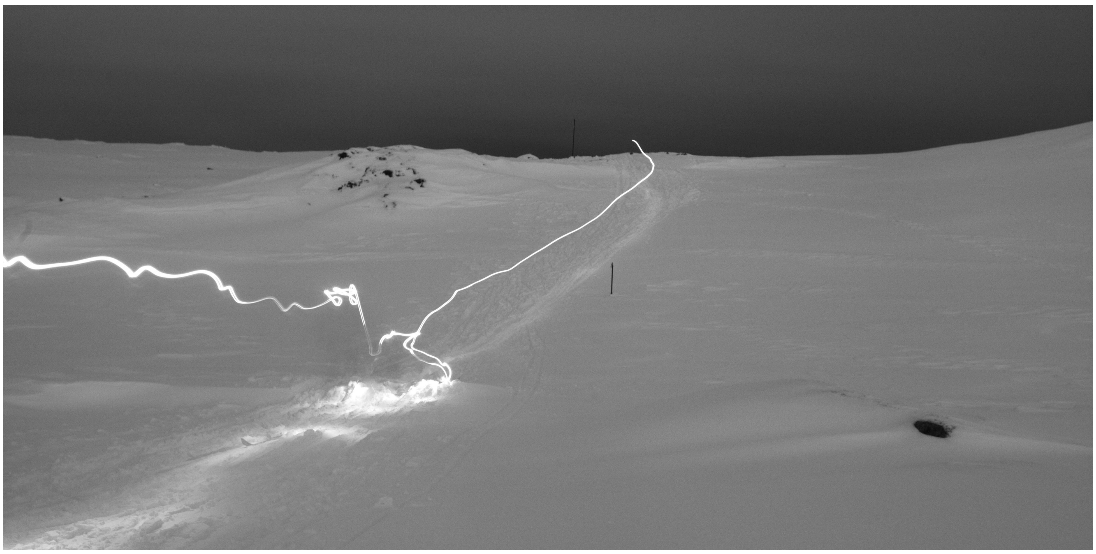
$$x * y = \int_0^t x(s)y(t-s)\,ds$$

og derfor vil konvolusjon ofte være definert slik i et typisk kapittel om laplacetransform i en typisk lærebok i ingeniørmatematikk. For å få en følelse av hva konvolusjon er, er det faktisk lurt å begynne med litt sannsynlighetsregning. La oss kaste to terninger.

$\boxed{22}$ Finn sannsynlighetsfordelingen til $Z = \{\text{summen av antall øyne på to terninger}\}$.

Inspirert av dette kan vi gå litt videre. Anta at du har to uavhengige stokastiske variable X og Y med sannsynlighetstettheter $f(x)$ og $g(y)$.

$\boxed{23}$ Hva er sannsynlighetstettheten til $Z = X + Y$?



Dersom X tar verdien v og Y tar verdien $z-v$, tar $X+Y$ verdien z. Med andre ord kan $X+Y$ ta verdien z på mange forskjellige måter, og for å finne sannsynlighetstettheten til $X+Y$ må vi derfor summere opp bidraget fra alle alle måtene dette kan skje på, altså alle sannsynligheter på formen $f(v)g(z-v)$. Men dette er jo innmaten i konvolusjonsoperatoren! Sannsynlighetstettheten $h(z)$ til $X+Y$ blir derfor

$$h(z) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(z-v)\,dv.$$

Det som gjør konvolusjon så praktisk i forhold til lineær systemteori, kalles konvolusjonsteoremet. Vi bruker varablelskiftet $u = t-v$, $v = v$, og beregner

$$\begin{aligned}
\widehat{x * y} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(t-v)\,dv\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(t-v)\,e^{-i\omega t}\,dv\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(u)\,e^{-i\omega(u+v)}\,dv\,du = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(v)\,e^{-i\omega v}\,dv\,y(u)e^{-i\omega u}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)\,e^{-i\omega v}\,dv \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i\omega u}\,du = \hat{x}\hat{y}
\end{aligned}$$

$\boxed{24}$ Kommer på eksamen det her.

En liknende beregning gir **Plancherels identitet**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega)\overline{\hat{y}(\omega)}\,d\omega$$

som er analog til Parseval. Denne får vi bruk for til noen småting kommende uke, når vi skal fikle med litt kvantefysikk. I likhet med Parseval er det ikke uvanlig å skrive opp spesialtilfellet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{x}(\omega)\|^2\,d\omega.$$

$\boxed{25}$ Beviset er i bunn og grunn identisk med utledningen av Parseval.

Konvolusjonsteoremet gjelder for laplacetransform og, men utledningen er bittelitt annerledes siden signalene er 0 for $t < 0$.

$\boxed{26}$ Løs $\ddot{x}(t) + x(t) = \sin t$ med $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

La oss avslutte med en litt heuristisk utgreining. La oss si at vi har løst systemet

$$Lx = f \qquad x(0) = 0$$

med laplacetransform og fått

$$X(s) = H(s)F(s).$$

Konvolusjonsteoremet gir nå at

$$x = h * f$$

så hvis vi kunne finne ut hvilket signal som har laplacetransform H, så er det bare å skrive opp løsningen x. Men dersom vi løser

$$Lx = \delta$$

med omvending får vi

$$X = H(s)\mathcal{L}(\delta) = H(s)$$

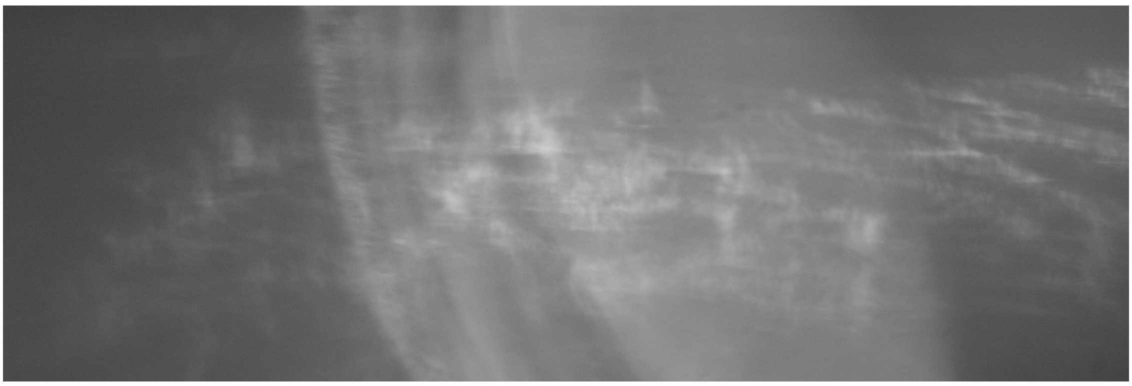
så impulsresponsen er visst det ukjente signalet vårt.

Dette er forklaringen på at impulsresponsen har fått bokstaven h; det er det signalet som har laplacetransform H. Diracpulsen er et viktig verktøy i signalbehandling, for den er et signal som inneholder "like mye av alle frekvenskomponenter". Det sies at Asbjørn Krogstad (legendarisk professor i akustikk på NTH) tok med seg startpistol og fyrte av et skudd inne i Nidarosdomen i forbindelse med et oppdrag der han skulle analysere akustikken i rommet. Jeg har en kamerat som heter Elsys Torjus og han klapper i mikrofonen når han skal teste filtrene han har skrevet. På elektroingeniørfolkemunne (der det kan være et litt diffust skille mellom laplace- og fourieromvending) sier man gjerne at

> Fourieromvendingen til impulsresponsen det samme som frekvensresponsen til systemet.

$\boxed{27}$ Hvis du synes det var litt kjekt med diracpulsen og sånt, kan du prøve å beregne

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega.$$



UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ En amerikaner står og koser seg med å perforere en uendelig lang låvevegg med maskingeværet sitt. Han er ganske full og har det kjempekjekt, og løpet peker i tilfeldige og uniformt fordelte vinkler mellom $\theta = -\pi/2$ og $\theta = \pi/2$. (Når $\theta = 0$ er løpet ortogonalt på veggen). Finn sannsynlighetstettheten og den tilhørende karakteristiske funksjonen til treffpunktet x på veggen. Du finner LF på side 154 i Hardle og Simar:
`https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-26006-4`

$\boxed{2}$ Fourieromvending er et viktig verktøy for å analysere frekvensinnholdet i signaler. Men de fleste gamle NTH-ere husker det fra studietiden som en unødvendig knotete og vanskelig teknikk for å løse noen typer differensiallikninger. Fourieromvend varmelikningen med hensyn på x og bruk $u(x, 0) = f(x)$ til å forklare at (jeg har satt $\alpha = 1$ for å være grei)

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{\frac{-(x-v)^2}{4t}} \, dv.$$

$\boxed{3}$ La $x, y \in \mathbb{C}^n$. I diskret signalbehandling skriver de

$$(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\overline{y(k)}$$

som er det vanlige komplekse skalarproduktet, men med motsatt vei, slik at det er lineært i første og ikke andre faktor. Vis at dersom

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-2\pi i n k/N} \qquad \text{er} \qquad x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{2\pi i n k/N}.$$

Vektoren X_n kalles den **diskrete fourieromvendingen** til x.

$\boxed{4}$ Sett $c_n = 1$ for alle n og plott partialsummene til den resulterende fourierrekken. Hva ser du?

Dette semesteret har vi vært borti egenverdier og egenvektorer i forbindelse med LTI-systemer. Egenvektoren til differensialoperatoren

$$\frac{d}{dt}$$

er eksponensialfunksjonen $x(t) = e^{at}$. Venstresiden i et LTI-system, slik som

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x$$

er en lineærkombinasjon av differensialoperatorer, og derfor er i retrospekt ikke så overraskende at eksponensialfunksjonen er lett å jobbe med; egenvektorene er jo fremdeles $x(t) = e^{at}$, men de korresponderende egenverdiene avhenger av differensialoperatoren.

$\boxed{5}$ I høst brukte vi dette til å finne naturlig respons. Hvilken egenverdi korresponderer dette til?

$\boxed{6}$ I januar fant vi frekvensresponsen. Hvilken egenverdi korresponderer dette til?

$\boxed{7}$ Hvis du tenker på konvolusjon med signalet x som en lineæroperator som tar inn et signal y:

$$L(y) = x * y = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)\,dt$$

er funksjonen

$$g(s,t) = e^{st}$$

er egenvektor til denne operatoren. Hva er egenverdien?